Übungsaufgaben zur Vorlesung „Algebraische Zahlentheorie“

Blatt 1

Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen erwünscht!

Aufgabe 1*: (= Aufgabe 0.1.1 im Skript) (3+3 Punkte)
Ein nullteilerfreier Ring A heißt *euklidisch*, wenn es eine Abbildung

$$N\colon A\setminus\{0\}\to\mathbb{Z}_{>0}\qquad\text{(“Euklidische Normabbildung”)}$$

mit der folgenden Eigenschaft gibt (“Division mit Rest”): Für je zwei Elemente $a, b \in A$, $b \neq 0$ gibt es $q, r \in A$ mit $a = qb + r$ und entweder $r = 0$ oder $N(r) < N(b)$.

(1) Sei A ein euklidischer Ring mit Norm N. Zeigen Sie, dass A ein Hauptidealring ist.

Hinweis: Sei $\mathfrak{a} \neq (0)$ ein Ideal von A. Wählen Sie ein Element $b \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$ mit $N(b)$ minimal.

(2) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i] = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ bezüglich der Normabbildung $N(x + iy) = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$ euklidisch ist.

Hinweis: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ existiert ein $x+iy \in \mathbb{Z}[i]$ mit $|z-(x+iy)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. (Warum?)

Aufgabe 2*: (= Aufgabe 1.0.2 im Skript) (5 Punkte)
Finden Sie den Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Aufgabe 3: (= Aufgabe 1.0.3 im Skript) (3 Punkte)
Ist $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ der Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$?

Aufgabe 4*: (= Aufgabe 1.0.4 im Skript) (6 Punkte)
Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, wobei α eine Nullstelle von $X^3 + X^2 - 2X + 8 \in \mathbb{Z}[X]$ sei. Finden Sie das Minimalpolynom von

$$\beta := \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$$

über $\mathbb{Q}$. Ist β ganz?

Bonusaufgabe 5*: (= Aufgabe 1.0.1 im Skript) (2+4 Bonuspunkte)
ei A ein beliebiger Ring.

(1) Zeigen Sie die Existenz eines nullteilerfreien Ringes R und eines surjektiven Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to A$.

Sei K ein Körper und $M \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Wir erinnern an die *Adjunkte* M^{adj} von M; dies ist die $(n \times n)$-Matrix, deren (j, i)-ter Eintrag $(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ ist, wobei M_{ij} die Streichmatrix ist, die aus M durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht. In der linearen Algebra beweist man dann die Formel

$$M^{\mathrm{adj}}M = MM^{\mathrm{adj}} = \det(M)I_n. \tag{1}$$

(2) Setzen Sie die Gültigkeit der Formel (1) für Körper voraus und beweisen Sie dann ihre Gültigkeit für Matrizen über dem Ring A.
Hinweis: Nach der vorherigen Teilaufgabe gibt es einen surjektiven Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to A$, wobei R wie in der vorherigen Teilaufgabe ist. Der Ring R hat einen Quotientenkörper.

Aufgaben, die mit einem Sternchen (*) versehen sind, zählen beim Vorrechnen als Teil der Studienleistung.

Abgabedetails:

Wann? Donnerstag, 27.10.2022 bis spätestens 15:00 Uhr

Wo? Sie haben drei Optionen:

(1) In der Vorlesung,

(2) Ins Postfach von Demleitner im 3. Stock des mathematischen Instituts,

(3) Per E-Mail an Demleitner.

Wie? Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen erlaubt, sogar erwünscht. Alle Namen und Matrikelnummern auf das Blatt schreiben.