Übungsaufgaben zur Vorlesung „Algebraische Zahlentheorie“

Blatt 2

Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen erwünscht!

Aufgabe 1: (= Aufgabe 2.0.2 im Skript) (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Ideal $(2, X) \subset \mathbb{Z}[X]$ kein Hauptideal ist.

Aufgabe 2*: (= Aufgabe 2.0.3 im Skript) (3+1 Punkte)

(1) Beweisen Sie den *Satz über rationale Nullstellen*:
Sei A ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K, sowie

$$f = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0 \in A[X].$$

Ist $\alpha \in K$ eine Nullstelle von f, so gibt es $a, b \in A$, $b \neq 0$ mit $\alpha = \frac{a}{b}$ und $a \mid a_0$, $b \mid a_n$.

(2) Folgern Sie, dass faktorielle Ringe ganz abgeschlossen sind.

Aufgabe 3: (= Aufgabe 2.0.5 im Skript) (2+1 Punkte)
Sei $f\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{p} \subset B$ ein Primideal. Verifizieren Sie, dass $f^{-1}(\mathfrak{p}) \subset A$ ein Primideal ist. Stimmt die Aussage auch, wenn man "Primideal" durch "maximales Ideal" ersetzt?

Aufgabe 4*: (= Aufgabe 2.0.6 im Skript) (4+3+3 Punkte)
Sei B/A eine ganze Ringerweiterung von Integritätsringen.

(1) Zeigen Sie:

$$B \text{ ist ein Körper} \iff A \text{ ist ein Körper.}$$

(2) Sei $\mathfrak{p} \subset B$ ein Primideal und $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap A$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}'$ genau dann ein maximales Ideal von A ist, wenn $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von B ist.

Sei K nun ein Zahlkörper.

(3) Folgern Sie, dass jedes Primideal $\neq (0)$ in $\mathcal{O}_K$ maximal ist.

Bonusaufgabe 5*: (= Aufgabe 2.0.1 im Skript) (1+2+3+1 Bonuspunkte)
Betrachten Sie den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. In der Einleitung zum Skript wurde behauptet, dass dieser nicht faktoriell ist. Hier verifizieren Sie alle Details.

(1) Sei $N\colon \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{Z}$ durch $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$ definiert. Begründen Sie kurz, dass N multiplikativ ist, d.h. für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gilt

$$N((a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})) = N(a + b\sqrt{-5})N(c + d\sqrt{-5}).$$

(2) Zeigen Sie, dass ± 1 die einzigen Einheiten von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sind.

(3) Zeigen Sie, dass die Elemente $2, 3, 1 + \sqrt{-5}$ und $1 - \sqrt{-5}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ zwar irreduzibel, aber nicht prim sind.

(4) Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht faktoriell ist.

Aufgaben, die mit einem Sternchen (*) versehen sind, zählen beim Vorrechnen als Teil der Studienleistung.

Abgabedetails:

Wann? Donnerstag, 03.11.2022 bis spätestens 15:00 Uhr

Wo? Sie haben drei Optionen:

(1) In der Vorlesung,

(2) Ins Postfach von Demleitner im 3. Stock des mathematischen Instituts,

(3) Per E-Mail an Demleitner.

Wie? Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen erlaubt, sogar erwünscht. Alle Namen und Matrikelnummern auf das Blatt schreiben.