Übungsaufgaben zur Vorlesung „Algebraische Zahlentheorie“

Blatt 3

Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen erwünscht!

Der Satz von Dedekind (Satz 3.13) darf in Ihrer Lösung verwendet werden!

Aufgabe 1: (= Aufgabe 3.2.1 im Skript) (4 Punkte)
Beweisen Sie Lemma 3.6.

Aufgabe 2*: (= Aufgabe 3.2.2 im Skript) (3+5+3 Punkte)
Sei A ein Dedekindring und $(0) \neq \mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu beweisen, dass für jedes $x \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$ ein $y \in \mathfrak{a}$ existiert, sodass $\mathfrak{a} = (x, y)$. Gehen Sie wie folgt vor:

(1) Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein von (0) verschiedenes Primideal. Zeigen Sie, dass durch

$$\varphi\colon A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}} \to A/\mathfrak{p}^n, \qquad \frac{a}{b} + \mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}} \mapsto (a + \mathfrak{p}^n)(b + \mathfrak{p}^n)^{-1} \qquad (a, b \in A,\ b \notin \mathfrak{p})$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von Ringen beschrieben ist.

(2) Sei $(0) \neq \mathfrak{b} \subset A$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass jedes Ideal in $A/\mathfrak{b}$ ein Hauptideal ist.
Hinweis: Reduzieren Sie auf den Fall $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}^n$ (Chinesischer Restsatz!) und wenden Sie die vorherige Teilaufgabe an.

(3) Folgern Sie die zu zeigende Aussage, indem Sie die vorherige Teilaufgabe auf ein geeignetes Ideal $\mathfrak{b}$ anwenden.

Aufgabe 3*: (= Aufgabe 3.2.3 im Skript) (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass Dedekindringe genau dann Hauptidealringe sind, wenn sie faktoriell sind.

Aufgaben, die mit einem Sternchen (*) versehen sind, zählen beim Vorrechnen als Teil der Studienleistung.

Abgabedetails:

Wann? Donnerstag, 10.11.2022 bis spätestens 15:00 Uhr

Wo? Sie haben drei Optionen:

(1) In der Vorlesung,

(2) Ins Postfach von Demleitner im 3. Stock des mathematischen Instituts,

(3) Per E-Mail an Demleitner.

Wie? Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen erlaubt, sogar erwünscht. Alle Namen und Matrikelnummern auf das Blatt schreiben.