Übungsaufgaben zur Vorlesung „Algebraische Zahlentheorie“

Blatt 4

Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen erwünscht!

Der Satz von Dedekind (Satz 3.13) darf in Ihrer Lösung verwendet werden!

Aufgabe 1*: (= Aufgabe 3.2.6 im Skript) (3+2 Punkte)

(1) Zeigen Sie, dass die Ideale

$$\left(2,\ 1+\sqrt{-5}\right),\ \left(3,\ 1+\sqrt{-5}\right)\ \text{ und }\ \left(3,\ -1+\sqrt{-5}\right)$$

prim in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sind.

(2) Zeigen Sie, dass das Ideal (5) in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht prim ist und geben Sie – mit Begründung – ein Primideal $\mathfrak{p}$ an, das (5) enthält. Verifizieren Sie dann $(5) = \mathfrak{p}^2$.

Aufgabe 2*: (= Aufgabe 3.2.2 im Skript) (5 Punkte)
Sei A ein Dedekindring und $(0) \neq \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ ganze Ideale mit Primfaktorisierung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{\mu_k} \text{ und } \mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{\nu_k},$$

wobei $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ paarweise verschiedene Primideale sind und $\mu_i, \nu_j \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i^{\min\{\mu_i,\nu_i\}}, \qquad \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i^{\max\{\mu_i,\nu_i\}}.$$

Aufgabe 3: (= Aufgabe 3.2.3 im Skript) (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Klassengruppe von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ein Element der Ordnung 2 besitzt.

Aufgabe 4: (= Aufgabe 4.2.2 im Skript) (5 Punkte)
Sei K ein Zahlkörper, $\alpha \in \mathcal{O}_K$. Zeigen Sie, dass $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$ und $\mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$ ganze Zahlen sind. Folgern Sie daraus, dass α genau dann eine Einheit in $\mathcal{O}_K$ ist, wenn $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) \in \{\pm 1\}$ gilt.

Bonusaufgabe 5*: (= Aufgabe 4.3.1 im Skript) (5 Bonuspunkte)
Sei B eine Ringerweiterung von $\mathbb{Z}$, sodass B ein endlich erzeugter freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang n ist. Ferner seien $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von B und p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $(\overline{\beta}_n, \ldots, \overline{\beta}_n)$ eine $\mathbb{F}_p$-Basis von $\overline{B} := B/pB$ ist. Hierbei bezeichnet $\overline{\beta}_i$ die Klasse von β_i in $\overline{B}$.
Folgern Sie dann aus der obigen Aussage, dass die Reduktion der Diskriminante

$$d_{B/\mathbb{Z}}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

modulo p gerade

$$d_{\overline{B}/\mathbb{F}_p}(\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_n)$$

ist.

Aufgaben, die mit einem Sternchen (*) versehen sind, zählen beim Vorrechnen als Teil der Studienleistung.

Abgabedetails:

Wann? Donnerstag, 17.11.2022 bis spätestens 15:00 Uhr

Wo? Sie haben drei Optionen:

(1) In der Vorlesung,

(2) Ins Postfach von Demleitner im 3. Stock des mathematischen Instituts,

(3) Per E-Mail an Demleitner.

Wie? Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen erlaubt, sogar erwünscht. Alle Namen und Matrikelnummern auf das Blatt schreiben.