Übungsaufgaben zur Vorlesung „Algebraische Zahlentheorie“

Blatt 5

Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen erwünscht!

Aufgabe 1*: (= Aufgabe 4.4.1 im Skript) (6 Punkte)
Sei $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ quadratfrei und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Zeigen Sie: Es ist $\{1, \theta\}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$, wobei

$$\theta = \begin{cases} \sqrt{d}, & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod 4, \\ \frac{1+\sqrt{d}}{2}, & \text{falls } d \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Insbesondere gilt $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$. Bestimmen Sie außerdem die Diskriminante von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ in Abhängigkeit von d.

Aufgabe 2: (= Aufgabe 4.4.3 im Skript) (2+2 Punkte)
Entscheiden Sie auf die folgenden zwei Art und Weisen, ob $\alpha := \frac{3+2\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}$ eine ganze algebraische Zahl ist:

(1) Schreiben Sie α als $\mathbb{Q}$-Linearkombination einer Ganzheitsbasis von $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$. Handelt es sich um eine ganzzahlige Linearkombination?

(2) Berechnen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$. Hat es ganzzahlige Koeffizienten?

Aufgabe 3*: (= Aufgabe 4.4.6 im Skript) (10 Punkte)
Sei α eine Nullstelle von $X^3 - X - 2 \in \mathbb{Z}[X]$ und $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$.

Hinweis: Offensichtlich gilt $\mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathcal{O}_K$. Gehen Sie für die umgekehrte Inklusion wie folgt vor:

- Berechnen Sie die Diskriminante von $\mathbb{Z}[\alpha]$. (Es ist $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}[\alpha]$. Gerne dürfen Sie die Berechnung der Spuren etwas abkürzen, Ihr Rechenweg sollte allerdings erkennbar sein.)
- Nach Proposition 4.14 (2) gilt $d_{\mathbb{Z}[\alpha]} = (\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha])^2 \cdot d_K$. Welche Werte kann der Index $(\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha])$ also annehmen?
- Zeigen Sie $(\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha]) = 1$, indem Sie das Resultat aus Bonusaufgabe 4 nutzen.

Bonusaufgabe 4*: (= Aufgabe 4.4.5 im Skript) (10 Bonuspunkte)
Sei K ein Zahlkörper, d_K seine Diskriminante. Zeigen Sie:

$$d_K \equiv 0 \pmod 4 \qquad \text{oder} \qquad d_K \equiv 1 \pmod 4.$$

Hinweis: Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die komplexen Einbettungen von K und $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ eine Ganzheitsbasis von K. Nach der Leibniz-Formel für die Determinante können wir schreiben

$$\det(\sigma_i(\omega_j)) = \underbrace{\sum_{\pi \in A_n} \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(\omega_{\pi(i)})}_{=:P} - \underbrace{\sum_{\pi \notin A_n} \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(\omega_{\pi(i)})}_{=:N}.$$

Dann gilt also $d_K = (P-N)^2 = (P+N)^2 - 4PN$. Warum reicht es dann, $P+N, PN \in \mathbb{Z}$ zu zeigen?
Um das zu zeigen, fixieren Sie eine Einbettung $K \subset \mathbb{C}$ und betrachten Sie dann eine Galoiserweiterung $L \subset \mathbb{C}$ von $\mathbb{Q}$, die K enthält. Zeigen Sie $P+N, PN \in L$. Wenn Sie zeigen, dass $P+N$ und PN von jedem Element von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ fixiert werden, dann...

Aufgaben, die mit einem Sternchen (*) versehen sind, zählen beim Vorrechnen als Teil der Studienleistung.

Abgabedetails:

Wann? Donnerstag, 24.11.2022 bis spätestens 15:00 Uhr

Wo? Sie haben drei Optionen:

(1) In der Vorlesung,

(2) Ins Postfach von Demleitner im 3. Stock des mathematischen Instituts,

(3) Per E-Mail an Demleitner.

Wie? Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen erlaubt, sogar erwünscht. Alle Namen und Matrikelnummern auf das Blatt schreiben.