Übungsaufgaben zur Vorlesung „Algebraische Zahlentheorie“

Blatt 6

Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen erwünscht!

Aufgabe 1*: (= Aufgabe 4.6.1 im Skript) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Ganzheitsring eines Zahlkörpers unendlich viele Primideale hat.

Aufgabe 2*: (= Aufgabe 4.6.2 im Skript) (5 Punkte)
Sei L/K Erweiterung von Zahlkörpern und $\alpha \in \mathcal{O}_L$ ein primitives Element. Zeigen Sie: $\mathfrak{C} = \{\gamma \in \mathcal{O}_L \mid \gamma\mathcal{O}_L \subset \mathcal{O}_K[\alpha]\}$ ist ein Ideal $\neq (0)$ von $\mathcal{O}_L$.

Aufgabe 3: (= Aufgabe 4.6.3 im Skript) (4 Punkte)
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-19})$. Berechnen Sie die Primidealzerlegung von $p\mathcal{O}_K$ für $p = 2, 3, 5, 7$.

Aufgabe 4*: (= Aufgabe 4.6.4 im Skript) (7 Punkte)
Sei α eine Nullstelle von $X^3 - X - 2 \in \mathbb{Z}[X]$ und $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. In Blatt 5, Aufgabe 3 haben Sie verifiziert, dass $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$ gilt und dafür $d_K = -104$ gezeigt. Sei nun p eine Primzahl. Erläutern Sie kurz, warum eine der folgenden fünf Möglichkeiten eintritt:

(i) p ist in K total zerfallend,

(ii) p ist in K total verzweigt,

(iii) p ist in K total träge,

(iv) $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^2 \cdot \mathfrak{p}_2$ für Primideale $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$ von $\mathcal{O}_K$,

(v) $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2$ für Primideale $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$ von $\mathcal{O}_K$.

Gibt es für jede der fünf Möglichkeiten eine entsprechende Primzahl p? Wenn ja, so geben Sie diese explizit an und begründen Sie Ihre Antwort. Wenn nein, beweisen Sie die Nichtexistenz.
Hinweis: Die größte Primzahl, die Sie probieren sollten, ist die 31. Wenn Sie eine gute Nudel sein möchten, können Sie auch noch die Primidealzerlegung von $p\mathcal{O}_K$ in den einzelnen Fällen angeben, notwendig für die Lösung ist das allerdings nicht.

Leichte Bonusaufgabe 5: (4 Bonuspunkte) (= Aufgabe 4.6.5 im Skript)
Sei L/K eine Körpererweiterung von Zahlkörpern und F ein Zwischenkörper. Sei $\mathfrak{P} \neq (0)$ ein Primideal in $\mathcal{O}_L$ und $\mathfrak{P}_F := \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_F$, $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_K$. Zeigen Sie:

$$f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{P}|\mathfrak{P}_F) \cdot f(\mathfrak{P}_F|\mathfrak{p}) \qquad \text{und} \qquad e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{P}|\mathfrak{P}_F) \cdot e(\mathfrak{P}_F|\mathfrak{p}).$$

Aufgaben, die mit einem Sternchen (*) versehen sind, zählen beim Vorrechnen als Teil der Studienleistung.

Abgabedetails:

Wann? Donnerstag, 01.12.2022 bis spätestens 15:00 Uhr

Wo? Sie haben drei Optionen:

(1) In der Vorlesung,

(2) Ins Postfach von Demleitner im 3. Stock des mathematischen Instituts,

(3) Per E-Mail an Demleitner.

Wie? Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen erlaubt, sogar erwünscht. Alle Namen und Matrikelnummern auf das Blatt schreiben.