Übungsaufgaben zur Vorlesung „Algebraische Zahlentheorie“

Blatt 7

Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen erwünscht!

Aufgabe 1*: (= Aufgabe 4.6.5 im Skript) (4+2 Punkte)
Sei $\alpha \notin \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von $X^4 - \frac{3}{2}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + X - \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}[X]$ und $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(1) Finden Sie $\mathcal{O}_K$.

(2) Berechnen Sie die Primidealzerlegungen von $p\mathcal{O}_K$ für $p \in \{3, 23\}$. Geben Sie in allen Fällen die Verzweigungsindizes und Trägheitsgrade an.

Aufgabe 2*: (= Aufgabe 5.1.1 im Skript) (4+3 Punkte)
Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ergänzen Sie die folgenden Details im Beweis von Satz 5.3 (1):

(1) Ist $\Lambda \subset V$ eine diskrete Untergruppe, so ist Λ abgeschlossen in V.

Anleitung: Sei $||\cdot||$ irgendeine Norm auf V. Da Λ diskret ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0) \cap \Lambda = \{0\}$, wobei $B_\varepsilon(0)$ der ε-Ball um 0 bzgl. $||\cdot||$ ist. Folgern Sie für $B := B_{\varepsilon/2}(0)$:

$$B - B := \{x - y \mid x, y \in B\} \subset B_\varepsilon(0).$$

Sei nun $v \in V \setminus \Lambda$ und $v + B := \{v + x \mid x \in B\}$. Wenn nun $(v + B) \cap \Lambda = \emptyset$, sind Sie fertig – warum?
Andernfalls gibt es ein $\lambda \in (v + B) \cap \Lambda$. Zeigen Sie dann $(v + B) \cap \Lambda = \{\lambda\}$ und folgern Sie daraus die Behauptung.

(2) Ist $K \subset V$ kompakt und $A \subset V$ eine abgeschlossene, diskrete Menge, so ist $A \cap K$ endlich.

Aufgabe 3*: (= Teil von Aufgabe 5.1.6 im Skript) (4+3 Punkte)
Sei p eine Primzahl.

(1) Zeigen Sie, dass ganze Zahlen u, v mit $u^2 + v^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ existieren.

Hinweis: Für $p = 2$ ist die Aussage klar. Für p ungerade zählen Sie jeweils die Elemente der Mengen

$$S = \{u^2 \pmod{p} \mid u \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{und} \qquad S' = \{-1 - v^2 \pmod{p} \mid v \in \mathbb{Z}\}.$$

(2) Für $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $u^2 + v^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ definieren wir

$$\Lambda_{u,v} := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \mid c \equiv ua + vb \pmod{p} \quad \text{und} \quad d \equiv ub - va \pmod{p}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\Lambda_{u,v}$ ein vollständiges Gitter in $\mathbb{R}^4$ ist.

Hinweis: Es ist $\Lambda_{u,v} \subset \mathbb{Z}^4$ eine Untergruppe. Es genügt dann, $(\mathbb{Z}^4 : \Lambda_{u,v}) < \infty$ zu zeigen.

Bonusaufgabe 4*: (= Aufgabe 5.1.2 im Skript) (5 Bonuspunkte)
Geben Sie ein Beispiel einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}$ und einer diskreten Menge $Y \subset \mathbb{R}$ an, sodass $K \cap Y$ nicht endlich ist. (Begründung!)

Aufgaben, die mit einem Sternchen (*) versehen sind, zählen beim Vorrechnen als Teil der Studienleistung.

Abgabedetails:

Wann? Donnerstag, 08.12.2022 bis spätestens 15:00 Uhr

Wo? Sie haben drei Optionen:

(1) In der Vorlesung,

(2) Ins Postfach von Demleitner im 3. Stock des mathematischen Instituts,

(3) Per E-Mail an Demleitner.

Wie? Abgabe in Gruppen bis zu drei Personen erlaubt, sogar erwünscht. Alle Namen und Matrikelnummern auf das Blatt schreiben.