JProf. Abhishek Oswal
Dr. Andreas Demleitner WS 2024/25

Exercises "Algebraic Number Theory"

Sheet 3

Problem 1: (5 points)
Show that in the ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, 3 is irreducible but not prime. Conclude that $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ is not a UFD.

Problem 2: (5 points)
Show that the only integer solutions to the equation $y^2 = x^3 - 2$ are $x = 3, y = \pm 5$.
(Hint: Recall from the previous problem set that $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ is Euclidean, in particular a UFD.)

Problem 3: (5 points)
Let d be a squarefree integer (possibly negative). Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ and let $\mathcal{O}_K \subset K$ denote the ring of integers of K. Show that when $d \equiv 1 \pmod 4, \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ and when $d \equiv 2, 3 \pmod 4, \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Problem 4: (5 points)
Let d be a squarefree integer, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, and $\mathcal{O}_K \subset K$ the ring of integers of K. Let p be an odd prime number. Show that p is a prime element of $\mathcal{O}_K$ if and only if d is not a square in the finite field $\mathbb{F}_p$.

Abgabedetails:

Wann? Bis spätestens Donnerstag, 07. November 2024, 12:00.

Wo? Sie haben zwei Optionen:

- Ins Postfach von Demleitner im 3. Stock des mathematischen Instituts
- Geben Sie unserem Tutor Jannek Link das Blatt in der Vorlesung

Wie? Abgabe in Gruppen bis zu zwei Personen erlaubt, sogar erwünscht. Alle Namen und Matrikelnummern auf das Blatt schreiben. Abgabe in deutscher Sprache ist in Ordnung.