JProf. Abhishek Oswal
Dr. Andreas Demleitner WS 2024/25

Exercises "Algebraic Number Theory"

Sheet 5

Problem 1: (6 points)
Let α be a root of $X^3 - X - 2 \in \mathbb{Z}[X]$ and $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Show that $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$.
Hint: How is the discriminant of $\mathbb{Z}[\alpha]$ related to the discriminant of K?

Problem 2: (4 points)
Let K be a number field. Show that $\mathcal{O}_K$ has infinitely many prime ideals.

Problem 3: (1+3+4+2 points)
Let p be an odd prime number and $\zeta = \zeta_p$ a primitive pth root of unity. Furthermore, denote by

$$\Phi_p := X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$$

the pth cyclotomic polynomial. Its roots are $\zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{p-1}$.

(1) Show that $\Phi_p'(\zeta) = \prod_{1<a<p}(\zeta - \zeta^a)$, where Φ_p' denotes the derivative of Φ_p.

(2) Let $1 < a < p$. Show that

$$N_{\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}}(\zeta - \zeta^a) = \prod_{1 \leq j < p} (\zeta^j - \zeta^{aj}) = p.$$

(3) Use (1) and (2) to show that

$$N_{\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}}(\Phi_p'(\zeta)) = (-1)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} \cdot \Delta(\Phi_p).$$

(4) Conclude that the discriminant of $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ with respect to the basis $\{1, \zeta, \ldots, \zeta^{p-2}\}$ equals

$$(-1)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} \cdot p^{p-2}.$$

Abgabedetails:

Wann? Bis spätestens Donnerstag, 21. November 2024, 12:00.

Wo? Sie haben zwei Optionen:

- Ins Postfach von Demleitner im 3. Stock des mathematischen Instituts
- Geben Sie unserem Tutor Jannek Link das Blatt in der Vorlesung

Wie? Abgabe in Gruppen bis zu zwei Personen erlaubt, sogar erwünscht. Alle Namen und Matrikelnummern auf das Blatt schreiben. Abgabe in deutscher Sprache ist in Ordnung.