

Vortragsübersicht Oberseminar

Familien von Varietäten und (gemischte) Hodge-Strukturen

Ich würde vorschlagen, in etwa [GS] zu folgen, wo sehr schön die Beweise auf die wesentlichen Elemente oder Spezialfälle reduziert zu sein scheinen. Ich gebe zusätzlich weitere Fundorte für mehr Informationen an. Die meiste Technik ist sicherlich in [S].

Ziel ist es, die folgende Frage zu verstehen: gegeben eine Familie von projektiven Varietäten über der Kreisscheibe mit der Eigenschaft, dass die Fasern über dem Komplement des Nullpunkts glatt sind, wie kann man eine (gemischte) Hodgestruktur auf die Kohomologie der zentralen Faser setzen und wie hängt diese mit den Strukturen auf den glatten Fasern zusammen.

1.) Reine Hodge-Strukturen

([GS, §1,2], [CMP, p.37ff], [S, p.215ff])

Hier sollen die grundlegenden Definitionen eingeführt und durch Beispiele erläutert werden. Insbesondere sollte als Beispiel für eine reine (polarisierte) Hodge-Struktur die (primitive) Kohomologie von kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten/projektiven Mannigfaltigkeiten auftauchen. Zudem soll die abelsche Kategorie der reinen Hodge-Strukturen eingeführt und diskutiert werden.

2.) Gemischte Hodge-Strukturen

([GS §1b, 4], [CMP, 3.3], [V, 8.4])

Hier sollen die grundlegenden Definitionen eingeführt und durch Beispiele erläutert werden. Insbesondere sollte als Beispiele für eine gemischte Hodge-Struktur die Kohomologie von einer Varietät mit normalen Kreuzungen und die Kohomologie von nicht-kompakten Varietäten (mit Hilfe von logarithmischen Formen) auftauchen. Wieder soll diskutiert werden, inwiefern diese Strukturen eine abelsche Kategorie bilden.

3.) Variation von Hodge-Strukturen, Familien von Mannigfaltigkeiten, Griffiths-Transversalität

([GS, §3.a], [S, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15])

Hier soll die Variation der Strukturen, die in 1.) eingeführt worden sind, in einer glatten Familie diskutiert werden. Insbesondere soll der Gauß-Manin-Zusammenhang eingeführt und seine wesentliche Eigenschaft (Transversalität) diskutiert und zumindest in einem Spezialfall bewiesen werden.

4.) Klassifizierende Räume für Hodge-Strukturen, Perioden-Matrizen, Holomorphie der Periodenabbildung

([GS, §3b], [S, §3], [CMP, 12.1, 12.2])

Hier sollen mit Hilfe von elementarer Lie-Theorie die klassifizierenden Räume für Hodge-Strukturen eingeführt werden. Es handelt sich dabei um offene Mengen D (sog. Periodengebiete) in Faser-Mannigfaltigkeiten Z , die man mit Hilfe von Gruppenwirkungen definieren kann. Gegeben eine Familie wie in der ursprünglich diskutierten Situation, gibt es eine sogenannte Periodenabbildung von der Basis der Familie in einen klassifizierenden Raum. Mit Hilfe der Vorarbeiten aus 3.) soll gezeigt werden, dass diese holomorph ist.

5.) Beispiele für Hodge-Strukturen und Variationen

([V, 7.2] und [GS], [CMP, 1.2], [CMP, 4.3.5])

Gewicht 1 und 2 (Tori und K3-flächen), Zusammenhang zu Kurven

6.) Differentialgeometrie und Krümmungseigenschaften von Periodengebieten I

([CMP, 11.3, 13.3, insbesondere Thm. 13.3.3])

Dieser Vortrag ist reine Differentialgeometrie auf homogenen Räumen. Es sollen grundlegende Konzepte diskutiert werden und vor allen soll gezeigt werden, dass es auf Periodengebieten spezielle invariante Metriken gibt, die negative holomorphe Schnittkrümmung in horizontale Richtungen haben (Thm. 13.3.3); wieder soll dies an Beispielen erläutert werden.

7.) Differentialgeometrie und Krümmungseigenschaften von Periodengebieten II

([GS, 3a, insbes. Lem. 3.14, 3.19, 3.23])

Hier wird die spezielle in 6.) konstruierte Metrik mit einer beliebigen Metrik verglichen. Die entsprechenden Abschätzungen benötigt man in 9.). Vorträge 6.) und 7.) sollten ein wenig als Einheit gesehen werden, so dass man vielleicht einiges aus 6.) noch nach 7.) schiebt.

8.) Ahlfors-Lemma und Anwendungen von 4.) (Quasi-unipotenz des Monodromie-Operators)

([GS, §7a und b], [CMP, 13.4])

Nach den Vorbereitungen in 6.) und 7.) nutzt man nun die Krümmungseigenschaften, um mit elementaren Anwendungen von klassischen Ergebnissen der komplexen Geometrie (eine Variable) die Unipotenz des Monodromie-Operators zu beweisen.

9.) Nilpotent Orbit Theorem

([GS, Thm 3.31, §9a], [S, §4])

Exemplarisch für den Fall einer Variation von Hodge-Strukturen von Gewicht 2 soll hier das Nilpotent Orbit Theorem bewiesen werden, das eine vereinfachte asymptotische Form der Periodenabbildung in der Nähe des Nullpunkts angibt. Dies soll mit Hilfe des Satzes über die Regularität des Gauß-Manin-Zusammenhanges geschehen, den man zuvor beweist.

10.) Das SL_2 -Orbit-Theorem

([GS, §9b])

Das SL_2 -Orbit-Theorem verfeinert die asymptotische Beschreibung des Periodenabbildung, indem es zu jedem nilpotenten Orbit einen SL_2 -orbit konstruiert. Dann ist das Degenerationsverhalten durch die SL_2 -Darstellungstheorie bestimmt. Wieder sollte hauptsächlich Gewicht 2 diskutiert werden.

11.) Anwendungen von 9.): Konstruktion der gemischten Hodge-Struktur of der zentralen Faser: Gewichtsfiltrierung und Limes-Hodge-Filtrierung

([GS, §10a], Kapitel IV und V in [G], [S, §6])

Zuerst sollte eine Beweisskizze für die Existenz der Gewichtsfiltrierung mit Hilfe der Jordan-Normalform gegeben werden (wieder für Gewicht 2).

Dann sollte die Limes-Hodge-Struktur definiert und angedeutet werden, wie man den Beweis auf explizite Untersuchung von sl_2 -Darstellungen reduzieren kann.

12.) Zusammenhang zwischen Deligne- und Limes-Hodge-Struktur: die Clemens-Schmid-Sequenz

([GS, §10b], Kapitel VI in [G])

Nach Deligne trägt die Kohomologie der zentralen Faser eine gemischte Hodge-Struktur; die Clemens-Schmid-Sequenz vergleicht diese mit der Struktur, die man als Limes der Hodge-Strukturen auf den glatten Fasern in den letzten Vorträgen konstruiert hat. Wenn die Zeit reicht, wäre es schön, wenn geometrische / topologische Anwendungen diskutiert würden.

13.) Degeneration von Hodge-Bündeln nach Steenbrink

(Kapitel VII in [G], [SP])

Hier soll eine andere Konstruktion der Limes-Hodge-Struktur auf der zentralen Faser einer Familie vorgestellt werden. Diese Konstruktion ist algebraisch und basiert auf der Theorie der Hodge-Moduln.

LITERATUR:

[CMP]Carlson, Müller-Stach, Peters: Period mappings and period domains

[G]Griffiths (ed.): Topics in Transcendental Algebraic Geometry

[GS]Griffiths, Schmid: Recent developments in Hodge theory

[S]Schmid: Variations of Hodge Structure: Singularities of the period mapping

[SP]Steenbrink, Peters: Mixed Hodge Structures

[V]Voisin: Hodge-Theorie and Complex Algebraic Geometry I