1. Übungsblatt
Topologie
im SS 2018 bei Dr. D. Hein

Abgabe Montag, den 23.4.18
12 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und
Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass für eine Menge X die kofinite Topologie, deren abgeschlossene Mengen endlich oder ganz X sind, eine Topologie ist.

(b) Erhalten wir auch eine Topologie, wenn abgeschlossene Mengen der ganze Raum X oder abzählbar sind?

(c) Erhalten wir auch eine Topologie, wenn abgeschlossene Mengen entweder leer oder unendlich sind?

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass für einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V zwei äquivalente Normen die gleiche Topologie induzieren. Zeigen Sie dazu:

(a) Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind genau dann äquivalent, wenn die zugehörigen Metriken d_1 und d_2 äquivalent sind.

(b) Für äquivalente Metriken d_1 und d_2 ist jeder Ball in der Metrik d_1 auch in der Metrik d_2 offen und andersrum.

Aufgabe 3

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ genau dann die abgeschlossenen Mengen einer Topologie $\mathcal{O}$ beschreibt, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(a) Für zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ ist auch $A \cup B \in \mathcal{A}$.

(b) Sei I eine Indexmenge und $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in I$. Dann ist auch $A = \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

(c) $\emptyset$ und X sind in $\mathcal{A}$.

Aufgabe 4

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und A, B und A_i für $i \in I$ Teilmengen von X. Zeigen Sie in a), b) und c) jeweils eine der Aussagen:

(a) $\overline{A} = X \setminus (A^c)^\circ$ oder $A^\circ = X \setminus \overline{A^c}$.

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ oder $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(c) $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A}_i$ oder $\bigcup_{i\in I} A_i^\circ \subseteq (\bigcup_{i\in I} A_i)^\circ$