10. ÜBUNGSBLATT
TOPOLOGIE
IM SS 2018 BEI DR. D. HEIN

Abgabe Montag, den 2.7.18
12 Uhr in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen auf Ihr Blatt

Bitte denken Sie an die Anmeldung zu Studien- und Prüfungsleistungen bis zum 29.6.

Aufgabe 1

(a) Seien X, Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die Abbildung f genau dann stetig in $x \in X$ ist, wenn für jedes Netz $(x_i)_I$ mit $(x_i) \to x$ gilt, dass das Netz $(y_i = f(x_i))_I$ gegen $y = f(x)$ konvergiert.

(b) Das Bild eines Ultrafilters unter einer stetigen Abbildung ist wieder ein Ultrafilter.

(c) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig am Punkt $x \in X$, wenn für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{F} \to x$ gilt $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.

Aufgabe 2

Sei X ein topologischer Raum. Beweisen Sie die Aussagen in Beispiel 5.23:

(a) Sei (x_n) eine Folge in X und $\mathcal{F}$ der von der Folge erzeugte Filter. Dann ist ein Punkt $x \in X$ genau dann Häufungspunkt der Folge (d.h., jede Umgebung enthält unendlich viele Folgenglieder), wenn x Berührungspunkt des Filters ist.

(b) Eine Folge (x_n) konvergiert genau dann gegen einen Punkt x, wenn der von der Folge erzeugte Filter gegen x konvergiert.

(c) Der Abschluss einer nicht-leeren Teilmenge A von X besteht genau aus den Berührungspunkten des Filters $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid A \subseteq F\}$, es gilt also $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass der Raum der Abbildungen vom Intervall $[0,1]$ in die zweipunktige Menge mit der Topologie der punktweisen Konvergenz kompakt, aber nicht folgenkompakt ist.

Aufgabe 4

Sei $X = \{f\colon \mathbb{R} \to [0,1] \mid f(x) \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $x \in \mathbb{R}\}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Zeigen Sie:

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die Menge $U_x = \{f \in X \mid f(x) < 1\}$ Diese Mengen bilden eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung.

(b) X ist folgenkompakt.

Hinweis: Zeigen Sie für b) zuerst, dass $[0,1]^{\mathbb{N}}$ das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und damit folgenkompakt ist.