11. Übungsblatt
Topologie
im SS 2018 bei Dr. D. Hein

Abgabe Montag, den 9.7.18
12 Uhr in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Sei X eine Menge, $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $A \subseteq X$. Zeigen Sie:

(a) Die Familie $\mathcal{F} \cap A := \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$ bildet genau dann einen Filter auf A, wenn $A \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Dann heißt $\mathcal{F} \cap A$ der **Spurfilter** von $\mathcal{F}$ auf A.

(b) Sei nun $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter mit $A \in \mathcal{F}$. Dann ist auch $\mathcal{F} \cap A$ ein Ultrafilter auf A.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen für eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X und einen Punkt $x \in X$ äquivalent sind:

(a) Es gilt $x \in \overline{A}$.

(b) Für den Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ ist mit der Definition wie in Aufgabe 1 auch $\mathcal{U}(x) \cap A$ ein Filter auf A.

(c) Es gibt einen Filter $\mathcal{F}$ auf A, so dass $\iota(\mathcal{F})$ gegen x konvergiert, wobei $\iota\colon A \to X$ die Inklusion ist.

Aufgabe 3

Sei $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ der Raum der Folgen in $[0,1]$. Mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ist dieser Raum nach Tychonoff kompakt und damit lokalkompakt.

Zeigen Sie, dass X mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz nicht lokalkompakt ist.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass jeder lokalkompakte Raum regulär ist.