12. Übungsblatt
Topologie
im SS 2018 bei Dr. D. Hein

Abgabe Montag, den 16.7.18
12 Uhr in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Metrik d' auf X, so dass d und d' die gleiche Topologie erzeugen und $d'(x, y) \leq 1$ für alle $x, y \in X$ gilt.

(b) Die Metrik d' aus a) kann nicht zu d äquivalent sein, wenn d unbeschränkt ist.

Aufgabe 2

Seien X, Y lokalkompakt und $f\colon X \to Y$ eigentlich. Zeigen Sie:

(a) Das Bild abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(b) Wenn f bijektiv ist, ist f bereits ein Homöomorphismus.

Aufgabe 3

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eigentlich.

(a) Zeigen Sie, dass im Fall $n \geq 2$ die Funktion f nach oben oder nach unten beschränkt ist.

(b) Geben Sie im Fall $n = 1$ ein Gegenbeispiel zur Aussage in a) an.

Aufgabe 4

Sei X ein topologischer und Y ein metrischer Raum und sei $(f_n) \subseteq C(X, Y)$ eine Funktionenfolge. Auf $C(X, Y)$ definieren wir eine Topologie durch die Subbasis von Mengen der Form

$$S_{K,U} = \{f \in C(X, Y) \mid K \subseteq f^{-1}(U)\}$$

für $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen. Diese Topologie heißt die **kompakt-offene Topologie** $\mathcal{O}_{ko}$ auf $C(X, Y)$.

Zeigen Sie, dass (f_n) genau dann in der kompakt-offenen Topologie konvergiert, wenn alle Einschränkungen auf kompakte Teilmengen von X gleichmäßig konvergieren.

Hinweis: Gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen gegen eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt, dass es für jede kompakte Menge $K \subseteq X$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon$ für alle $n \geq N$ und $x \in K$.