2. Übungsblatt
Topologie
im SS 2018 bei Dr. D. Hein

Abgabe Montag, den 30.4.18
12 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Sei X eine unendliche Menge und $\mathcal{O}$ die kofinite Topologie auf X und $A \subset X$.

(a) Geben Sie den Abschluss $\overline{A}$ von A in $(X, \mathcal{O})$ an und beweisen Sie Ihr Ergebnis. Unterscheiden Sie dabei die Fälle, ob A endlich oder unendlich viele Elemente hat.

(b) Können Sie abgeben, welche Mengen dicht in X sind?

Aufgabe 2

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie:

(a) A ist genau dann offen, wenn $A = A^\circ$.

(b) A ist genau dann offen und abgeschlossen, wenn ihr Rand ∂A leer ist.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die Mengen der Form (a, ∞) für $a \in \mathbb{R}$ eine Basis einer Topologie $\mathcal{O}_\infty$ auf $\mathbb{R}$ bilden.

(b) Betrachten Sie folgende Topologien auf $\mathbb{R}$:

- die Topologie $\mathcal{O}_\infty$ aus a),
- die Standardtopologie $\mathcal{O}_{std}$ und
- die Topologie $\mathcal{O}_l$ (englisch: lower limit topology) der Sorgenfrey-Geraden mit der Basis $[a, b)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Sind diese Topologien miteinander vergleichbar? Wenn ja, geben Sie für jedes Paar an, welche Topologie feiner ist.

Aufgabe 4

Sei $X = \{a, b, c, d, e\}$. Geben Sie die Topologie $\mathcal{O}$ explizit als Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ an, die

$$\mathcal{S} = \Big\{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, e\}\Big\}$$

als Subbasis hat.