5. Übungsblatt
Topologie
im SS 2018 bei Dr. D. Hein

Abgabe Montag, den 28.5.18
12 Uhr in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Seien X_i für $i \in I$ topologische Räume und $X = \prod_{i \in I} X_i$ trage die Produkttopologie. Zeigen Sie:

(a) Die Projektionen $p_i \colon X \to X_i$ mit $p_i(x) = x_i$ sind stetig und offen.

(b) Die Mengen der Form $p_i^{-1}(U)$ mit $U \subseteq X_i$ offen bilden eine Subbasis der Produkttopologie.

Aufgabe 2

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Zeigen Sie für die Quotiententopologie $\mathcal{O}_\sim$ auf dem Quotienten $X/_\sim$ die folgenden Eigenschaften. Orientieren Sie sich dabei an den Beweisen analoger Aussagen für die Produkt- oder Unterraumtopologie.

(a) $\mathcal{O}_\sim$ ist die feinste Topologie auf $X/_\sim$, so dass die Projektion π stetig ist.

(b) Es gibt genau eine Topologie auf $X/_\sim$, die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: eine Abbildung $f \colon X/_\sim \to Y$ genau dann stetig ist, wenn $f \circ \pi \colon X \to Y$ stetig ist.

Aufgabe 3

Sei $X = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ der Raum aller Folgen reeller Zahlen und darin X^0 die Teilmenge aller Folgen, die ab einem Index konstant Null sind. Wir definieren auf X verschiedene Topologien. Bestimmen Sie jeweils den Abschluss von X^0 in X mit der angegebenen Topologie.

(a) Die Produkttopologie $\mathcal{O}_\Pi$ auf X.

(b) Die Boxtopologie $\mathcal{O}_\square$, deren Basis Mengen der Form $U = \prod_{i=1}^\infty (a_i, b_i)$ für $a_i < b_i \in \mathbb{R}$ ist.

(c) Die Topologie der Supremumsmetrik $d(x, y) = \sup\{|x_i - y_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 4

Seien X, Y disjunkte topologische Räume, $A \subseteq X$ und $f \colon A \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren auf $Z = X \cup Y$ eine Äquivalenzrelation wie folgt:

$$z \sim w \Leftrightarrow \begin{cases} (z, w \in A \text{ und } f(z) = f(w)) & \text{oder } (z = w) \\ (z \in A, w \in Y \text{ und } f(z) = w) & \text{oder } (w \in A, z \in Y \text{ und } f(w) = z). \end{cases}$$

Der Quotient $Z/_\sim$ mit der Quotiententopologie wird mit $X \cup_f Y$ bezeichnet und heißt der Pushout von X und Y mittels f.

Konstruieren Sie für $X = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| \leq 1\}$ und $Y = \{0\}$ eine Teilmenge A und eine Abbildung f, so dass $X \cup_f Y$ homöomorph zur Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist.