8. Übungsblatt
Topologie
im SS 2018 bei Dr. D. Hein

Abgabe Montag, den 18.6.18
12 Uhr in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und
Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Sei X ein topologischer Raum und $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge. Zeigen Sie das Weierstraß-Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz:
Wenn $|f_i(x)| \leq M_i$ für alle $x \in X$ und $i \in \mathbb{N}$ gilt und die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} M_i$ konvergiert, dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f \colon X \to \mathbb{R}$.

Restliche Aufgaben: Ausblick zum Baireschen Kategoriensatz und Baire-Räume: Wichtig z.B. in Funktionalanalysis, bei uns später mehr.

Definitionen:

Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes heißt *nirgends dicht*, wenn $(\overline{A})^\circ = \emptyset$ gilt. Eine Teilmenge eines Topologischen Raumes heißt *mager* oder *von 1. Kategorie*, wenn sie eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. st eine Menge nicht mager, so heißt sie *fett* oder *von 2. Kategorie*. Das Komplement einer mageren Menge heißt *residuell* oder *komager*.

Aufgabe 2

Ein topologischer Raum heißt *Baire-Raum*, wenn er eine der folgenden Bedingungen erfüllt. Zeigen Sie, dass diese Bedingungen äquivalent sind:

(a) Für jede abzählbare Familie abgeschlossener, nirgends dichter Teilmengen A_i gilt auch $(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)^\circ = \emptyset$.

(b) Für U_i offen und dicht in X ist auch $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$ dicht in X.

(c) Jede offene, nicht-leere Teilmenge von X ist fett.

(d) Residuelle Mengen sind dicht.

Aufgabe 3 (Der Satz von Baire)

Zeigen Sie, dass jeder vollständige metrische Raum ein Baire-Raum ist.

Aufgabe 4

Folgern Sie aus Aufgabe 3 die folgenden Aussagen:

(a) Das Komplement einer mageren Menge in einem vollständigen metrischen Raum ist fett.

(b) Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf einer dichten Teilmenge von $\mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f mager.

(c) Es gibt keine Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die genau auf $\mathbb{Q}$ stetig ist.