9. Übungsblatt
Topologie
im SS 2018 bei Dr. D. Hein

Abgabe Dienstag, den 26.6.18
18 Uhr in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Zeigen Sie:

(a) Sei X ein folgenkompakter topologischer Raum. Abgeschlossene Unterräume von X sind wieder folgenkompakt.

(b) Endliche Summen von kompakten Räumen wieder kompakt sind. Stimmt diese Aussage auch für unendliche Summen?

(c) Seien X, Y topologische Räume, X quasikompakt, Y Hausdorff und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist das Bild $f(X) \subseteq Y$ kompakt.

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie alle kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ in der kofiniten Topologie.

(b) Sei $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ der Raum der Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $[0,1]$ mit der Topologie der Metrik $d((x_n),(y_n)) = \sup\{|x_n - y_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, dass X nicht folgenkompakt ist, indem Sie eine Folge angeben, die keinen Häufungspunkt besitzt.

Aufgabe 3

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Wenn $A \subseteq X$ kompakt ist, dann gilt für jedes $x \in X$, dass $d(x, A) = d(x, a)$ für ein $a \in A$ gilt. Dabei ist $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$.

(b) In einem metrischen Raum sind kompakte Mengen abgeschlossen und beschränkt.

(c) Jede abgeschlossene, beschränkte Menge in einem metrischen Raum ist kompakt.

Aufgabe 4

Sei $X \neq \emptyset$ ein kompakter topologischer Raum. Ein Punkt $x \in X$ heißt isoliert, wenn $\{x\}$ offen ist. Zeigen Sie: Wenn X keine isolierten Punkte hat, dann ist X überabzählbar.