TOPOLOGIE SS 2018

DORIS HEIN

Version vom 16. Juli 2018

Dieses Skript enthält keine Beweise und auch geometrische Beispiele und Bilder fehlen. Es kann also keine Vorlesungsmitschrift ersetzen, sondern nur eine grobe Orientierung und eine Übersicht über die Resultate geben.

Inhaltsverzeichnis

1. Grundbegriffe

1.1. Topologische Räume. Zunächst erinnern wir an Begriffe aus der Analysis:

Definition 1.1. Eine **Norm** auf einem reellen (oder komplexen) Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_+$, so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

(a) $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.
(b) Für $v \in V$ und $a \in \mathbb{R}$ (oder $a \in \mathbb{C}$) gilt $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$.
(c) Für $v, w \in V$ gilt $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Mit einer Norm bekommt man einen Abstandsbegriff durch $d(v, w) = \|v - w\|$, wenn man die Vektoren als geometrische Punkte auffasst. Das kann man verallgemeinern zu einer Metrik, die dann auch keine Vektorraumstruktur mehr braucht.

Definition 1.2. Ein **metrischer Raum** ist eine Menge M mit einer Abbildung

$$d: M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

so dass die folgenden Axiome gelten:

(a) Für zwei Punkte $x, y \in M$ gilt $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
(b) Es gilt $d(x, y) = d(y, x)$.
(c) Es gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

d heißt dann die **Metrik** auf M.

Mit Hilfe einer Metrik kann man schon viele Konzepte der Analysis beschreiben wie Stetigkeit oder Konvergenz von Folgen. Tatsächlich reicht es dafür bereits, wenn man beschreiben kann, welche Mengen offen oder abgeschlossen sind. Viele Sätze der Analysis arbeiten mit offenen Mengen, z.B. fordert man fast immer, dass Funktionen auf offenen Mengen definiert sind. In der Topologie arbeiten wir nur mit offenen (und abgeschlossenen) Mengen, ohne dass man eine Norm oder Metrik dazu braucht.

Definition 1.3. Eine **Topologie** $\mathcal{O}$ auf einer Menge X ist eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, so dass gilt:

(O1) Es ist $X \in \mathcal{O}$ und $\varnothing \in \mathcal{O}$.
(O2) $\mathcal{O}$ ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten, d.h. für $U, V \in \mathcal{O}$ gilt auch $U \cap V \in \mathcal{O}$.
(O3) $\mathcal{O}$ ist abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen, d.h. für beliebige Indexmengen I gilt: wenn $U_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$, dann auch $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.

Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen **offene Mengen** in $(X, \mathcal{O})$ und das Paar $(X, \mathcal{O})$ nennen wir einen topologischen Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement $A^c := X \smallsetminus A$ offen ist, also $A^c \in \mathcal{O}$.

Wie bei metrischen Räumen sehen wir die Menge X als geometrisches Objekt an und bezeichnen die Elemente von X als **Punkte**.

Zunächst schauen wir uns an, was die Definition einer Topologie für abgeschlossene Mengen bedeutet.

Satz 1.4. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.*

(a) *$\varnothing$ und X sind abgeschlossen.*
(b) *Für zwei abgeschlossene Mengen $A, B \subseteq X$ ist auch $A \cup B$ abgeschlossen.*
(c) *Sei I eine Indexmenge und $A_i \subseteq X$ für alle $i \in I$ abgeschlossen. Dann ist auch $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.*

Diese Eigenschaften für abgeschlossene Mengen sind direkt äquivalent zu den entsprechenden Eigenschaften für offene Mengen in der Definition einer Topologie. Man kann also eine Topologie auch über ihre abgeschlossenen Mengen definieren und diese Eigenschaften nachweisen.

Beispiel 1.5. Sei X eine Menge.

(a) Eine Topologie auf X ist die **triviale Topologie** $\mathcal{O} = \{\varnothing, X\}$.
(b) Eine weitere Topologie auf der gleichen Menge X ist die **diskrete Topologie** $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$.
(c) Die **kofinite Topologie** ist definiert durch ihre abgeschlossenen Mengen. Sei $\mathcal{O}$ die Topologie auf X, deren abgeschlossene Mengen endlich oder ganz X sind. Der Nachweis der Topologieeigenschaft ist Übung. Auf $\mathbb{R}$ ist das die **Zariski-Topologie**, die dadurch definiert ist, dass Nullstellenmengen von Polynomen abgeschlossen sein sollen. In $\mathbb{R}$ sind das gerade alle endlichen Mengen. Diese Topologie findet in der algebraischen Geometrie häufig Verwendung.

Wie schon erwähnt sind topologische Räume eine Verallgemeinerung von metrischen Räumen. Insbesondere trägt jeder metrische Raum eine Topologie.

Satz 1.6. *Jede Metrik auf M induziert eine Topologie durch folgende Definition offener Mengen: Eine Teilmenge $U \subseteq M$ ist offen, wenn für alle $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass der Ball $B_\epsilon(x) = \{y \in M \mid d(x,y) < \epsilon\}$ in U liegt.*

Insbesondere haben wir damit eine Topologie auf den Räumen $\mathbb{R}^n$, die mit den Begriffen von offen und abgeschlossen aus der Analysis übereinstimmt.

Insbesondere sind die Bälle selbst offen, denn sei $y \in B_r(x)$. Mit $0 < \epsilon < r - d(x,y) > 0$ gilt dann für $z \in B_\epsilon(y)$ auch $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r - d(x,y) < r$, also $z \in B_r(x)$. Offenbar ist jede offene Menge U die Vereinigung von offenen Bällen, nämlich um jeden Punkt den Ball mit Radius ϵ, der noch in U liegt.

Beispiel 1.7. (a) Nicht jede Topologie wird von einer Metrik induziert, z.B. die triviale Topologie auf Mengen mit mindestens zwei Elementen. Denn gäbe es eine solche Metrik, dann wäre für $x \neq y$ einerseits $y \notin B_{d(x,y)}(x)$, aber wegen $x \in B_{d(x,y)}(x)$ ist dieser Ball eine nicht-leere offene Menge und in der trivialen Topologie damit bereits die ganze Menge.
(b) Die diskrete Topologie ist dagegen eine metrische Topologie mit der diskreten Metrik $d(x,y) = 1$, wenn $x \neq y$.
(c) An der üblichen Topologie des $\mathbb{R}^n$ sieht man auch, warum wir für Durchschnitte nur fordern, dass endlich der Schnitt endlich vieler Mengen wieder offen sein soll.

Denn zum Beispiel ist $[-1,1] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$, bereits ein abzählbar unendlicher Schnitt offener Mengen kann also abgeschlossen sein.

Bemerkung 1.8. Bereits diese Definition von Offenheit hängt hängt vom gewählten Raum ab. Zum Beispiel ist $[-\pi,\pi]\cap\mathbb{Q}$ offen in $\mathbb{Q}$, aber nicht in $\mathbb{R}$.

Satz 1.9 (Satz und Definition)**.** *Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem Vektorraum V heißen **äquivalent**, wenn es Konstanten $c, C\in\mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $v\in V$ gilt*

$$c\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le C\|v\|_1.$$

*Analog heißen zwei Metriken d_1, d_2 auf einer Menge M **äquivalent**, wenn es Konstanten $a, A\in\mathbb{R}$ gibt, so dass für je zwei Punkte $x, y\in M$ gilt*

$$a\, d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le A\, d_1(x,y).$$

Äquivalente Normen und Metriken induzieren die gleiche Topologie.

Bemerkung 1.10. (a) Auf endlichdimensionalen Vektorräumen sind alle Normen äquivalent, es gibt also eine natürliche Topologie.

Denn sei $\|\cdot\|$ eine Norm, $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm und $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm. Sei C so, dass $\|e_i\| \le C$ für alle Standardbasisvektoren e_i. Dann gilt für $v = (v_1,\dots,v_n)$, dass

$$\|v\| \le \sum_{i=1}^n |v_i|\,\|e_i\| \le C\sum_{i=1}^n |v_i| \le Cn\|v\|_\infty \le Cn^{3/2}\|v\|_2.$$

Damit sieht man auch sofort, dass die Normfunktion $\|\cdot\|$ stetig ist. Auf der kompakten Einheitssphäre nimmt sie damit ein Minimum an, dieses habe den Wert $\frac{1}{c}$, also ist $\|w\|c\ge 1$ für alle w auf der Einheitssphäre. Dann gilt mit $v = aw$ für $a>0$ und w auf der Einheitssphäre

$$\|v\|_2 = a\|w\|_2 = a \le ac\|w\| = c\|v\|.$$

Zusammen haben wir gezeigt, dass jede Norm äquivalent zur euklidischen Norm ist und damit sind auch je zwei Normen äquivalent.

(b) Warnung: Auf Räumen unendlicher Dimension gilt das nicht, z.B. sind die C^0-Norm und die C^1-Norm auf $C^1([a,b],\mathbb{R})$ nicht äquivalent. Es gilt nur $\|f\|_{C^0} \le \|f\|_{C^1}$, in die andere Richtung gibt es aber keine universelle Abschätzung.

(c) Es sind selbst im Endlichdimensionalen nicht alle Metriken äquivalent, zum Beispiel ist die Metrik der französischen Eisenbahn zwar von unten durch die euklidische Metrik beschränkt, zwei Punkte können euklidisch aber beliebig nah beieinander sein, auch wenn sie in der Metrik der französischen Eisenbahn weit voneinander entfernt sind. Es gibt also keine obere Schranke durch ein Vielfaches der euklidischen Metrik.

Nachdem wir nun den Begriff der Offenheit von Mengen verallgemeinert haben, können wir das auch für das Innere, den Abschluss oder den Rand von Mengen tun. Kompaktheit ist ebenfalls eine topologische Eigenschaft, diese betrachten wir allerdings erst später.

Definition 1.11. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

(a) Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ definieren wir das **Innere** von A durch

$$U^\circ := \bigcup_{V \in \mathcal{O}, V \subseteq A} V$$

und den **Abschluss**

$$\overline{A} := \bigcap_{A \subseteq V, V^c \in \mathcal{O},} V.$$

Der **Rand** von A ist

$$\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ.$$

(b) Eine **Umgebung** eines Punktes $x \in X$ ist eine Teilmenge $U \subseteq X$, so dass es ein $V \in \mathcal{O}$ gibt mit $x \in V \subseteq U$. Die Menge aller Umgebungen eines Punktes $x \in X$ bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(x)$. Genauso definieren wir Umgebungen von Teilmengen. Für $A \subseteq X$ ist eine Menge $B \subseteq X$ eine Umgebung von A, wenn es eine offene Menge $U \in \mathcal{O}$ gibt mit $A \subseteq U \subseteq B$.

Das Innere ist also die größte offene Menge, die in A enthalten ist, der Abschluss die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält. Die Inklusionseigenschaften folgen dabei direkt aus der Definition, die Offenheit des Inneren aus der Definition einer Topologie. Die Abgeschlossenheit des Abschlusses folgt aus den Schnitteigenschaften für abgeschlossene Mengen.

Beachte: Eine Umgebung eines Punktes muss nicht unbedingt offen sein. Meistens reicht es aber, mit offenen Umgebungen zu arbeiten.

Lemma 1.12. *Wir fassen einige Eigenschaften von Innerem und Abschluss zusammen. Sei dazu $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und A, B und A_i für $i \in I$ Teilmengen von X. Dann gelten:*

(a) $\overline{A} = X \setminus (A^c)^\circ$ *und* $A^\circ = X \setminus \overline{A^c}$.
(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *und* $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
(c) $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A}_i$ *und* $\bigcup_{i \in I} A_i^\circ \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ$

Wir verdeutlichen nochmal die Analogie zum metrischen Fall, indem wir für Inneres und Abschluss eine weitere Charakterisierung angeben:

Satz 1.13. *Sei U eine Teilmenge eines Topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$. Dann gilt:*

$$A^\circ = \{x \in A \mid \exists U_x \in \mathcal{O} \colon x \in U_x \subseteq A\} \quad \text{und} \quad \overline{A} = \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{U}(x) \colon V \cap A \neq \varnothing\}.$$

Eine Menge ist also genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist.

Umgekehrt kann man eine Topologie auf diese Weise lokal definieren, indem man alle Umgebungen jedes Punktes festlegt.

Satz 1.14. *Sei X eine Menge und für jedes $x \in X$ gebe es ein System $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$, so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:*

(a) *Für $A \in \mathcal{U}(x)$ gilt $x \in A$.*
(b) *Ist $A \in \mathcal{U}(x)$ und $A \subseteq B$, dann ist auch $B \in \mathcal{U}(x)$.*

(c) *$\mathcal{U}(x)$ ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten, d.h., für $A, B \in \mathcal{U}(x)$ ist auch $A \cap B \in \mathcal{U}(x)$.*
(d) *Für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \subseteq U$, so dass $V \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in V$ gilt.*

Dann gibt es genau eine Topologie auf X, deren Umgebungen genau die $\mathcal{U}(x)$ sind.

Beispiel 1.15. In metrischen Räumen verhalten sich Offenheit und Abgeschlossenheit so wie aus der Analysis bekannt. In normierten Räumen ist auch der Abschluss das, was man sich aus der Analysis darunter vorstellt. Für Metriken, die nicht von Normen kommen, stimmt das nicht mehr unbedingt.

(a) In einem metrischen Raum (X, d) sind die Mengen $D_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y \leq r\}$ abgeschlossen bezüglich der metrischen Topologie.

Sei nämlich $A = X \setminus D_r(x)$, $y \in A$ und $\epsilon = \frac{1}{2}(d(x, y) - r) > 0$. Dann ist $B_\epsilon(y) \subseteq A$, denn gäbe es ein $z \in D_r(x) \cap B_\epsilon(y)$, so wäre

$$2\epsilon + r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + \epsilon.$$

(b) In normierten Räumen ist sogar $\overline{B_r(x)} = D_r(x)$.

Die Inklusion $\subseteq$ ist nach a) klar. Für die andere Inklusion sei $y \in D_r(x)$. Wir müssen zeigen, dass jede Umgebung von y den Ball $B_r(x)$ schneidet. ObdA sei dazu $d(x, y) = r$, sonst ist die Behauptung sowieso klar, da $y \in B_r(x)$. Da jede Umgebung von y einen ϵ-Ball um y enthält, genügt es, solche Bälle zu betrachten. Sei also $\epsilon > 0$ beliebig. Setze

$$z = x + (1 - \frac{\epsilon}{2r})(y - x) = y - \frac{\epsilon}{2r}(x - y).$$

Dann gilt

$$d(x, z) = |1 - \frac{\epsilon}{2r}| \, \|y - x\| = r - \frac{\epsilon}{2} < r \text{ also } z \in B_r(x)$$

und

$$d(z, y) = |\frac{\epsilon}{2r}| \, \|y - x\| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \text{ also } z \in B_\epsilon(y).$$

(c) In allgemeinen metrischen Räumen ist b) falsch, denn bezüglich der diskreten Metrik auf Räumen X mit mindestens zwei Punkten ist jede Teilmenge offen und abgeschlossen. Es ist nämlich $B_r(x) = \{x\}$ für $0 < r \leq 1$ und damit sind einpunktige Mengen offen. Als Vereinigung ist damit jede Teilmenge von X offen. Da auch das Komplement offen ist, ist also auch jede Menge abgeschlossen. Insbesondere gilt

$$\overline{B_1(x)} = B_1(x) = \{x\} \neq X = D_1(x).$$

(d) In der kofiniten Topologie ist der Abschluss jeder unendlichen Teilmenge von X bereits der ganze Raum. Diese Topologie verhält sich also anders als die typischen Topologien der Analysis.

In der Analysis wurde bereits $\mathbb{R}$ als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ konstruiert und bemerkt, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Auch diese Definition können wir topologisch formulieren.

Definition 1.16. Eine Menge $A \subseteq (X, \mathcal{O})$ eines topologischen Raumes heißt **dicht**, wenn $\overline{A} = X$ gilt.

Topologisch sind insbesondere offene, dichte Mengen groß, obwohl sie nach anderen Maßstäben wie z.B. maßtheoretisch klein sein können. Zum Beispiel ist $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, aber eine Lebesgue-Nullmenge. Man kann sogar offene Umgebungen von $\mathbb{Q}$, also offene, dichte Mengen, definieren, die beliebig kleines Lebesgue-Maß haben. Dazu benutzt man die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ und betrachtet die Vereinigung von Intervallen der Längen $\frac{\epsilon}{2^n}$ um den n-ten Punkt der Abzählung. Diese Menge hat dann Maß höchstens ϵ, kann also beliebig klein sein.

Wie auch in der Algebra definiert man auch Topologien oft nicht, indem man alle offenen Mengen angibt, sondern nur von einigen Mengen fordern will, dass sie offen sind und dann schaut, welche Mengen noch offen sein müssen, damit man eine Topologie erhält. Dabei unterscheidet man zwei Arten von 'Erzeugendensystem' einer Topologie.

Definition 1.17. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

(a) Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ heißt **Basis** der Topologie, wenn es für jeden Punkt x in einer offenen Menge V ein $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in B \subseteq V$.
(b) Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$ heißt eine **Subbasis** der Topologie, wenn die endlichen Schnitte von Elementen von $\mathcal{S}$ eine Basis bilden.
(c) Für $x \in X$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}(x)$ eine **Umgebungsbasis** von x, wenn jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}_x$ enthält.
(d) Ein topologischer Raum erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.
(e) Ein topologischer Raum erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, wenn die Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

Für eine Basis $\mathcal{B}$ sind offene Mengen also genau Vereinigungen von Basismengen. Eigentlich genügt es aber, eine Subbasis aus offenen Mengen anzugeben. Denn die Definition einer Topologie verlangt ja, dass endliche Durchschnitte von offenen Mengen wieder offen sind.

Beispiel 1.18. (a) In metrischen Räumen sind die offenen Bälle eine Basis der Topologie, denn der Schnitt von zwei Bällen lässt sich wieder als Vereinigung von Bällen schreiben. Metrische Räume erfüllen das erste Abzählbarkeitsaxiom, denn wir können uns auf Bälle vom Radius $\frac{1}{n}$ beschränken.
(b) Die übliche (Norm-)Topologie auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, denn es genügen Bälle mit rationalem Radius um Punkt mit rationalen Koordinaten, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt.
(c) Überabzählbare Räume mit der diskreten Topologie erfüllen das erste, aber nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Denn in einer Basis der diskreten Topologie müssten alle einpunktigen Mengen enthalten sein, das sind aber überabzählbar viele. Andererseits ist $\{x\}$ bereits eine Umgebungsbasis von $x \in X$.

(d) Nicht jeder metrische Raum erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Betrachte zum Beispiel $C^0_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ den Raum der beschränkten, stetigen Funktionen mit der C^0-Metrik $d(f,g)=\sup_x|f(x)-g(x)|$. Wir geben eine überabzählbare Menge von Funktionen an, die paarweise Abstand 1 haben. Sei dazu F die Menge der Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

$$f(z)\in\{0,1\} \text{ für } z\in\mathbb{Z}$$

und

$$f \text{ linear auf den Intervallen } [z,z+1] \text{ für } z\in\mathbb{Z}.$$

Mit dem Diagonalverfahren prüft man leicht nach, dass F überabzählbar ist.

Gäbe es jetzt eine abzählbare Basis der Topologie, so enthielte jeder Ball vom Radius $\frac{1}{2}$ um eine dieser Funktionen $f\in F$ ein Element der Basis. Diese Bälle sind aber paarweise disjunkt und überabzählbar viele, also kann es keine abzählbare Basis der Topologie geben.

Bemerkung 1.19. (a) Das 1. Abzählbarkeitsaxiom folgt direkt aus dem zweiten, denn wir können die Basiselemente nehmen, die x enthalten. Dies sind immer noch höchstens abzählbar viele.

(b) Im ersten Abzählbarkeitsaxiom können wir sogar fordern, dass die Umgebungsbasis aus Mengen $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ besteht mit $U_{i+1}\subseteq U_i$. Denn sonst können wir einfach den Schnitt $U_i\cap U_{i+1}$ statt U_{i+1} betrachten und erhalten immer noch eine Umgebungsbasis.

(c) Wie Umgebungen nicht unbedingt offen sein müssen, muss auch eine Umgebungsbasis nicht aus offenen Mengen bestehen. Zum Beispiel bilden für die übliche Topologie des $\mathbb{R}^n$ sowohl die offenen Bälle $B_r(x)$ als auch deren Abschlüssen $D_r(x)$ jeweils eine Umgebungsbasis von x.

Wir haben bereits gesehen, dass eine Menge verschiedene Topologien tragen kann. Diese wollen wir gern miteinander vergleichen, was aber als Teilmengen der Potenzmenge nicht immer möglich ist.

Definition 1.20. Auf einer Menge X seien zwei Topologien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ gegeben. Wenn $\mathcal{O}_1\subseteq\mathcal{O}_2$ gilt, dann nennen wir $\mathcal{O}_2$ **feiner** als $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_1$ **gröber** als $\mathcal{O}_2$.

Eine gröbere Topologie hat also weniger, eine feinere mehr offene Mengen. Manchmal findet man auch die Begriffe von größeren oder kleineren Topologien, wir bleiben hier aber bei gröber oder feiner.

Beispiel 1.21. (a) Auf jeder Menge ist die triviale Topologie die gröbste, die diskrete Topologie die feinste, alle anderen Topologien liegen dazwischen.

(b) Die euklidische Topologie auf dem $\mathbb{R}^n$ ist gröber als die Topologie der Metrik der französischen Eisenbahn. Denn offene Intervalle auf Geraden durch 0 sind in der Topologie der französischen Eisenbahn offen, aber nicht in der euklidischen Topologie. Andersrum enthält jeder euklidische offene Ball auch ein Stück der Geraden durch 0 und den Mittelpunkt, diese Bälle sind also auch bezüglich der französischen Eisenbahn offen.

Satz 1.22. *Sei X eine Menge und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, so dass $X = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V$ und für alle $A, B \in \mathcal{B}$ und $x \in A \cap B$ gibt es ein $C \in \mathcal{B}$ mit $x \in C \subseteq A \cap B$. Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X, deren Basis $\mathcal{B}$ ist.*

In diesem Fall ist $\mathcal{O}$ die gröbste Topologie, die alle Mengen aus $\mathcal{B}$ enthält. Für eine Subbasis können wir sogar ein beliebiges Mengensystem nehmen, dessen Vereinigung der ganze Raum ist. Dies ist der einfachste Weg, eine Topologie anzugeben.

Aus dem Beweis ist auch klar, dass jede offene Menge eine Vereinigung von Basiselementen ist. Statt direkt die Topologien zu vergleichen, reicht es damit natürlich aus, Basen zu vergleichen.

Korollar 1.23. *Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ Basen der Topologien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ auf einer Menge X, so dass $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. Dann ist $\mathcal{O}$ gröber als $\mathcal{O}'$.*

Mehr Basismengen erzeugen natürlich nicht weniger offene Mengen der Topologie durch ihre Vereinigungen.

1.2. **Stetigkeit.** Von jetzt an schreiben wir die Topologie nicht mehr immer dazu, sondern nur, wenn wir verschiedene Topologien unterscheiden wollen. Wenn nicht anders angegeben, ist jeder Raum mit einer Topologie versehen.

Bis jetzt haben wir nur Räume betrachtet, als nächstes schauen wir uns Abbildungen zwischen diesen an. Zunächst definieren wir Stetigkeit auf metrischen Räumen wie in der Analysis.

Definition 1.24. Eine Abbildung $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ zwischen zwei metrischen Räumen heißt **stetig**, wenn an jedem Punkt $x_0 \in X$ gilt: für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass aus $d(x_0, x) < \delta$ folgt, dass $d(f(x_0), f(x)) < \epsilon$ ist.

Wir schauen uns diese Definition etwas genauer an: Zunächst schreiben wir die Ungleichungen als Aussagen über Bälle: $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\epsilon(f(x_0))$ oder äquivalent dazu $B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$.

Wir interpretieren dies so, dass das Urbild von $B_\epsilon(f(x_0))$ eine Umgebung von x_0 ist. Insbesondere ist also das Urbild jeder Umgebung von $f(x_0)$ eine Umgebung von x_0. Dies ist eine rein topologische Formulierung, die wir jetzt als Definition benutzen können.

Definition 1.25. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume.

(a) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **stetig in** $x \in X$, wenn für jede Umgebung V von $f(x)$ die Menge $f^{-1}(V) \subseteq X$ eine Umgebung von x ist.
(b) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **stetig**, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist, also für alle $V \in \mathcal{O}_Y$ gilt, dass $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$.

Mit Hilfe von Stetigkeit können wir auch verschiedene Topologien auf einer Menge vergleichen. Insbesondere zeigt der folgende Satz, dass selbst die Identität nicht immer stetig ist, wenn man nicht auf beiden Seiten die gleiche Topologie verwendet.

Satz 1.26. *Die Identität* $\mathrm{id}\colon (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ *ist genau dann stetig, wenn $\mathcal{O}_1$ feiner ist als $\mathcal{O}_2$.*

Beweis. Übung □

Bemerkung 1.27. Wie in der Analysis gilt: f ist genau dann stetig, wenn f in jedem Punkt stetig ist.

Denn wenn f stetig ist und $x \in X$, dann gibt es für jede Umgebung U von $f(x)$ eine offene Menge mit $f(x) \in V \subseteq U$. Dann ist $\tilde{V} = f^{-1}(V)$ offen mit $x \in \tilde{V}$, also ist jede Obermenge von $\tilde{V}$ eine Umgebung von x, insbesondere $f^{-1}(U)$.

Andersrum, sei f in jedem Punkt stetig und $V \subseteq Y$ offen mit $U = f^{-1}(V)$. Wir zeigen, dass $U^\circ = U$ gilt mit Hilfe von Satz 1.13. Sei nun $x \in U$. Dann ist V eine Umgebung von $f(x)$ und also ist $U = f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x. Insbesondere gibt es eine offene Menge U_x mit $x \in U_x \subseteq U$. Also ist $U = U^\circ$ und damit U offen.

Beispiel 1.28.
(a) In metrischen Räumen ist diese Definition äquivalent zur Definition mit ϵ und δ aus der Analysis.

Nach der Diskussion oben folgt aus der analytischen Definition die Stetigkeit in jedem Punkt. Für die andere Richtung sei f stetig im topologischen Sinne. Sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Betrachte $V = B_\epsilon(f(x))$. Dies ist eine offene Menge von Y und damit ist $f^{-1}(V) = U$ offen in X. Da $x \in U$ liegt, gibt es einen Ball $B_\delta(x) \subseteq U$ für ein $\delta > 0$. Also ist f auch stetig im analytischen Sinne und beide Definitionen sind äquivalent.
(b) Wenn Y die triviale oder X die diskrete Topologie trägt, dann ist jede Abbildung $f: X \to Y$ stetig. Die Beweise beider Aussagen sind Übung.

Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften stetiger Funktionen zusammen.

Satz 1.29. *Seien $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $(Z, \mathcal{O}_Z)$ topologische Räume und $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$.*
(a) *Ist f stetig in x und g stetig in $f(x)$, dann ist $g \circ f$ stetig in x.*
(b) *Wenn f und g stetig sind, dann ist auch die Komposition $g \circ f: X \to Z$ stetig.*

Satz 1.30. *Die folgenden Bedingungen für eine Abbildung von $f: X \to Y$ sind äquivalent:*
(a) *f ist stetig.*
(b) *Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.*
(c) *Für eine Basis $\mathcal{B}$ der Topologie $\mathcal{O}_Y$ auf Y ist $f^{-1}(B)$ offen in X für alle $B \in \mathcal{B}$.*
(d) *Für eine Subbasis $\mathcal{S}$ der Topologie $\mathcal{O}_Y$ auf Y ist $f^{-1}(B)$ offen in X für alle $B \in \mathcal{S}$.*

Definition 1.31. Wir definieren noch zwei weitere Typen von Abbildungen zwischen topologischen Räumen.
(a) Eine Abbildung heißt **offen**, wenn die Bilder offener Mengen wieder offen sind.
(b) Ein **Homöomorphismus** ist eine bijektive, offene, stetige Abbildung.

Eine offene Abbildung ist also das Gegenstück zu einer stetigen Abbildung, bei dem uns nicht die Urbilder, sondern die Bilder offener Mengen interessieren.

Bemerkung 1.32.
(a) Nicht jede stetige Abbildung ist offen, denn zu Beispiel konstante Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind zwar stetig, aber nicht offen.

(b) Wenn eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen topologischen Räumen invertierbar ist, dann ist die Stetigkeit von f äquivalent zur Offenheit der Inversen f^{-1}.
(c) Diese Definition eines Homöomorphismus entspricht der aus der Analysis, denn aus der Bijektivität folgt die Invertierbarkeit und die Offenheit von f ist äquivalent zur Stetigkeit von f^{-1}.
(d) Ein Homöomorphismus ist ein Isomorphismus von topologischen Räumen, denn nicht nur die Punkte, sondern auch die offenen Mengen entsprechen einander in beiden Richtungen.

Beispiel 1.33. Auch Mengen, die auf den ersten Blick sehr verschieden sind, können homöomorph sein.

(a) Eckige und runde Mengen: Die Bälle vom Radius 1 in den Metriken euklidischen Norm und der Maximumsnorm sind homöomorph. Man prüft leicht nach, dass die radiale Streckung ein Homöomorphismus vom runden Ball zum Quader der Maximumsnorm ist.
(b) Kleine und große Mengen: Der offene Einheitsball in $\mathbb{R}^n$ ist homöomorph zum ganzen $\mathbb{R}^n$ via $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2} \|x\|)x$. Dies sieht man direkt im Fall $n = 1$ am Graph, für höhere Dimensionen ist dies die analoge radiale Streckung.

1.3. **Konvergenz.** Wir erinnern auch hier zunächst an Begriffe aus der Analysis.

Definition 1.34. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Eine Folge (x_n) in X heißt **konvergent** (gegen einen Grenzwert x), wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(x_n, x) < \epsilon$ für alle $n \geq N$.
(b) Eine Folge (x_n) heißt **Cauchyfolge**, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(x_n, x_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$.
(c) Der metrische Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

In der Sprache der Topologie müssen wir also wieder die Metrik durch Aussagen über offene Mengen ersetzen.

Definition 1.35. Eine Folge (x_n) in einem topologischen Raum X **konvergiert gegen** $x \in X$, wenn es für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$.

Beispiel 1.36. (a) In metrischen Räumen erhalten wir wieder die metrische Konvergenz, da Umgebungen gerade durch ϵ-Bälle als Umgebungsbasis erzeugt werden.
(b) In den Übungen wird der Konvergenzbegriff in der trivialen und der diskreten Topologie untersucht, die sich beide von der Anschauung aus der Analysis unterscheiden. Insbesondere sind Grenzwerte von Folgen nicht mehr unbedingt eindeutig. Später sehen wir auch noch eine Bedingung an die Topologie, die Grenzwerte von Folgen eindeutig macht.

Beispiel 1.37. Ein spezielles Beispiel von nicht eindeutigem Grenzwert sieht man in einem Raum, der uns später noch öfter als Beispiel begegnen wird.

Wir betrachten als topologischen Raum die Menge der reellen Zahlen mit einem zusätzlichen Punkt p, also $X = \mathbb{R} \sqcup \{p\}$, wobei wir auf $\mathbb{R}$ die übliche Topologie benutzen und für p

eine Umgebungsbasis definieren durch Mengen der Form $\{p\} \cup (-a, 0) \cup (0, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}_+$. Dann konvergiert die Folge $x_n = 1/n$ sowohl gegen $0 \in \mathbb{R}$, als auch gegen den zusätzlichen Punkt p.

Satz 1.38. *Seien X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$ und $f: X \to Y$.*

(a) *Es gilt $\{x \in X \mid \exists$ Folge $(x_n) \subseteq A: x_n \to x\} \subseteq \overline{A}$*
(b) *In a) gilt Gleichheit, wenn X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.*
(c) *Wenn f an der Stelle $x \in X$ stetig ist, dann gilt für jede Folge $(x_n) \to x$, dass $f(x_n) \to f(x)$.*
(d) *in c) gilt die Umkehrung, wenn X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.*

Bemerkung 1.39. Hier sieht man die Bedeutung der Abzählbarkeitsaxiome. Für die kofinite Topologie auf überabzählbaren Mengen (also z.B. auf $\mathbb{R}$) ist das erste Abzählbarkeitsaxiom verletzt und damit auch das zweite.

Denn wenn es für $x \in \mathbb{R}$ eine abzählbare Umgebungsbasis $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$ gäbe, so ist das Komplement von $U = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ immer noch abzählbar. Dann ist $y \in U$ in jedem der U_i und damit auch in jeder Umgebung von x. Andererseits ist $V = \mathbb{R} \setminus \{y\}$ offen mit $x \in V$ für $y \neq x$, also gibt es eine Umgebung, die keins der U_i enthält.

In dieser Topologie konvergiert jede Folge, deren Folgenglieder paarweise verschieden sind, gegen jeden Punkt, denn für $x \in \mathbb{R}$ hat $U \in \mathcal{U}(x)$ ein endliches Komplement. Also kann U höchstens endlich viele Folgenglieder nicht enthalten, also enthält U alle Folgenglieder ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$ und damit konvergiert die Folge gegen x.

Definition 1.40. Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.

(a) Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** von A, wenn für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.
(b) Ein Punkt $x \in A$ heißt **isolierter Punkt** von A, wenn es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt, so dass $U \cap A = \{x\}$.

Offenbar sind nach Satz 1.13 die Häufungspunkte im Abschluss von A enthalten. Isolierte Punkte sind aber keine Häufungspunkte, daher ist der Abschluss nicht unbedingt die Menge der Häufungspunkte.

Satz 1.41. *Wenn X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann sind die folgenden Bedingungen für einen Punkt $x \in X$ äquivalent:*

(a) *x ist Häufungspunkt einer Teilmenge A.*
(b) *Es gibt eine Folge $(x_n) \subseteq A$ mit $x_n \neq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to x$.*

Mit Hilfe von Häufungspunkten können wir auch Grenzwerte von Funktionen definieren.

Definition 1.42. Seien X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$, $f: A \to Y$ eine Abbildung und a ein Häufungspunkt von A. Dann heißt $b \in Y$ der **Grenzwert** von f für $x \to a$, wenn für jede Umgebung $V \in \mathcal{U}(b)$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(a)$ existiert, so dass $U \cap (A \setminus \{a\}) \subseteq f^{-1}(V)$ ist. Wir schreiben dann wie in der Analysis $f(x) \to b$ für $x \to a$.

Um diese Eigenschaft näher zu untersuchen, müssen wir eine Topologie auf Teilmengen von X definieren können. Dies schauen wir uns im nächsten Abschnitt an und kommen dann hierauf zurück.

2. Konstruktionen topologischer Räume

Wir haben mit den Definitionen von Basis und Subbasis bereits gesehen, wie topologische Räume erzeugt werden können. Man kann aber auch topologische Räume aus anderen konstruieren. Dazu schauen wir uns in diesem Kapitel die wichtigsten Beispiele an.

2.1. Unterräume und Summen.

Teilmengen von topologischen Räumen tragen eine natürliche Topologie als Unterraum.

Definition 2.1. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Dann ist

$$\mathcal{O}_A = \{V \cap A \mid V \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf A, die wir die **Unterraumtopologie** oder **induzierte Topologie** nennen.

Man prüft leicht nach, dass $\mathcal{O}_A$ tatsächlich eine Topologie definiert. Alle Eigenschaften übertragen sich direkt von $\mathcal{O}$, denn für Schnitte oder Vereinigungen betrachtet man einfach die in X offenen Obermengen der Mengen aus $\mathcal{O}_A$.

Beispiel 2.2.
(a) Nicht jede Menge, die in A offen ist, ist auch in X offen. Betrachten zum Beispiel $A = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $[-1, 0) = A \cap (-2, 0)$ offen in A, aber nicht in $\mathbb{R}$.
(b) Bei Teilmengen von metrischen Räumen erhalten wir die Topologie, die von der Einschränkung der Metrik induziert wird.

Es gibt auch andere Definitionen der Unterraumtopologie mit Hilfe der Stetigkeit bestimmter Abbildungen.

Satz 2.3.
(a) *Es ist $\mathcal{O}_A$ die gröbste Topologie, für die die Inklusion stetig ist. Auch dies könnte man als Definition der Unterraumtopologie verwenden.*
(b) *Eine Abbildung $f: Z \to A$ ist genau dann stetig, wenn die Komposition $\iota_A \circ f: Z \to X$ stetig ist. Es gibt genau eine Topologie auf A, die diese universelle Eigenschaft der Unterraumtopologie erfüllt.*

Die Unterraumtopologie ist mit der Bildung weiterer Unterräume verträglich, wenn man Teilmengen von Teilmengen betrachtet.

Satz 2.4. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $B \subseteq A \subseteq X$.*
(a) *Wenn A offen (in X) ist, dann ist B genau dann offen in A, wenn B offen in X ist.*
(b) *Wenn A abgeschlossen (in X) ist, dann ist B genau dann abgeschlossen in A, wenn B abgeschlossen in X ist.*
(c) *Es gilt $\mathcal{O}_B = (\mathcal{O}_A)_B$, d.h., die Unterraumtopologie von B als Unterraum von X ist die gleiche wie die von B als Unterraum von A.*

Satz 2.5. *Sei $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$ mit $A_i \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist eine Abbildung $f: X \to Y$ genau dann stetig, wenn alle Einschränkungen $f_i := f|_{A_i}: A_i \to Y$ stetig sind.*

Mit Hilfe der Unterraumtopologie und Häufungspunkten haben wir jetzt noch eine Charakterisierung von Stetigkeit, die aus der Analysis bekannt ist.

Satz 2.6. *In der Situation der Definition sei $f: A \cup \{a\} \to Y$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) *f ist stetig in a.*
(b) *Es gilt $f(x) \to f(a)$ für $x \to a$ oder a ist kein Häufungspunkt von A.*

Auch disjunkte Vereinigungen topologischer Räume haben eine natürliche Topologie.

Definition 2.7. (a) Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume mit $X \cap Y = \varnothing$. Dann definieren wir auf $Z = X \cup Y$ die **Summentopologie** durch

$$\mathcal{O}_\sqcup = \{U \cup V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}.$$

(b) Sei I eine Indexmenge und X_i für $i \in I$ seien topologische Räume. Dann betrachten wir die **disjunkte Vereinigung** $Z = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ und definieren darauf die Topologie $\mathcal{O}_\sqcup = \{\bigsqcup_{i \in I} U_i \mid U_i \subset X_i \text{ offen}\}$.

Bemerkung 2.8. (a) Auf diese Weise können wir auch mehrere Kopien eines Raumes betrachten, zum Beispiel ist $X = \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ die Vereinigung zweier disjunkter Geraden, die wir beide mit $\mathbb{R}$ identifizieren.
(b) Offene Mengen in X und Y sind also auch offen in der Vereinigung. Wir können nämlich einfach die jeweils andere Menge in der Definition als leer wählen.
(c) Insbesondere sind in der Summentopologie die Räume X und Y in Z sowohl offen als auch abgeschlossen. Solche Mengen werden uns später noch einmal beschäftigen.

Satz 2.9. *Sei $Z = X \sqcup Y$ mit $X \cap Y = \varnothing$ wie oben und W ein weiterer topologischer Raum. Dann ist eine Abbildung $f: Z \to W$ genau dann stetig, wenn beide Einschränkungen $f|_X$ und $f|_Y$ stetig sind.*

2.2. **Produkte.** In diesem Abschnitt sei I immer eine Indexmenge und $(X_i, \mathcal{O}_i)$ für alle $i \in I$ seien topologische Räume.

Definition 2.10. (a) Wir definieren das **Produkt** der X_i durch

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ x: I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid x_i := x(i) \in X_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Für endliche Indexmengen I benutzen wir die Tupelschreibweise $x = (x_1, \dots, x_n)$. Ebenso schreiben wir bei einer abzählbaren Indexmenge I die Elemente als Folgen $x = (x_i)$.
(b) Im Spezialfall $X_i = X$ für alle $i \in I$ schreiben wir das Produkt auch als X^I oder bei endlicher Indexmenge als X^n. In diesem Fall identifizieren wir das Produkt mit der Menge der Abbildungen $\mathrm{Abb}(I, X)$.
(c) Die **Produkttopologie** definieren wir durch die Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{O}_i \text{ mit } U_i \neq X_i \text{ nur endlich oft} \right\}.$$

(d) Die **Projektionen** auf die einzelnen X_k sind definiert als $p_k\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_k$ mit $p_k(x) = x_k$.

Man prüft leicht nach, dass diese Mengen tatsächlich eine Basis definieren. Der Schnitt von zwei solcher Basismengen ist das Produkt der komponentenweisen Schnitte der offenen Mengen. Wenn in beiden Produkten nur endlich oft nicht der ganze Raum steht, dann ist dies auch für diese Schnitte der Fall. Damit erfüllt $\mathcal{B}$ die Voraussetzungen von Satz 1.22 und ist eine Basis einer Topologie.

Beispiel 2.11. (a) Im $\mathbb{R}^n$ ist das die Standardtopologie, die wir bisher über eine (beliebige) Norm definiert hatten. Die metrische Basis der Topologie sind die Quadrate (oder Würfel), wenn wir die Maximumsnorm benutzen. Als Produkttopologie erhalten wir alle Rechtecke (oder Quader) als Basismengen. Da sich aber jedes Rechteck als Vereinigung von Quadraten schreiben lässt, sind die beiden Topologien gleich.

(b) Allgemeiner erhalten wir für endliche Produkte metrischer Räume (X_i, d_i) die Produkttopologie durch die Metrik $d(x, y) = \max_{i=1,\dots,n} d_i(x_i, y_i)$.

Denn sei $U = \prod_{i=1}^n U_i$ ein Basiselement der Produkttopologie und $x \in U$. Dann gilt $x_i \in U_i$, also enthält jedes U_i einen ϵ_i-Ball um x_i für alle $i = 1, \dots, n$. Im Produktraum enthält daher U den Ball vom Radius $\min_{i=1,\dots,n} \epsilon_i$, also ist U offen in der Topologie der Maximumsmetrik.

Andersrum sei $U = B_r(x)$ ein offener Ball in der Maximumsmetrik. Es gilt dann $U = \prod_{i=1}^n B_r(x_i)$, also ist die Basis der metrischen Topologie enthalten in der Basis der Produkttopologie und damit sind die beiden Topologien gleich.

Bemerkung 2.12. Sei wieder $X = \prod_{i\in I} X_i$ und seien $A_i \subseteq X_i$ mit $A = \prod_{i\in I} A_i$. Dann ist auf A die Unterraumtopologie von A als Unterraum von X genau die Produkttopologie von A als Produkt der Unterräume A_i mit ihren Unterraumtopologien von A_i als Unterraum von X_i.

Satz 2.13. *Die Projektionen $p_k\colon X = \prod_{i\in I} X_i \to X_k$ sind stetig und offen. Eine Subbasis der Produkttopologie ist $\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I} p_i^{-1}(U_i)$ mit $U_i \in \mathcal{O}_i$.*

Auch die Produkttopologie kann man mit Hilfe einer universellen Eigenschaft beschreiben. Diese entspricht der aus der Analysis für den $\mathbb{R}^n$ bekannten Eigenschaft, dass eine Funktion genau dann stetig ist, wenn alle ihre (reellen) Komponentenfunktionen stetig sind.

Satz 2.14. (a) *Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie, für die alle Projektionen stetig sind.*

(b) *Es gibt genau eine Topologie, die die universelle Eigenschaft der Produkttopologie erfüllt: Eine Abbildung $f\colon Z \to X = \prod_{i\in I} X_i$ ist genau dann stetig, wenn alle Kompositionen $p_i \circ f\colon Z \to X_i$ stetig sind.*

Bemerkung 2.15. Man erkennt Ähnlichkeiten zwischen diesem Beweis der universellen Eigenschaft und dem im Fall der Unterraumtopologie. Noch allgemeiner können wir sowohl Unterraumtopologie als auch Produkttopologie als **Initialtopologie** auffassen.

Dabei betrachtet man eine Familie von topologischen Räumen $(X_i, \mathcal{O}_i)$ und eine Familie von Abbildungen $f_i: X \to X_i$. Dann gibt es auf X genau eine Topologie $\mathcal{O}$, so dass eine Abbildung $g: Y \to X$ genau dann stetig ist, wenn alle $f_i \circ g$ stetig sind. Diese ist definiert durch die Subbasis $f_i^{-1}(U_i)$ mit $U_i \in \mathcal{O}_i$.

Der Beweis der Eindeutigkeit funktioniert genau analog zum Fall der Produkttopologie, wenn wir $X = \prod_{i\in I} X_i$ und $f_i = p_i$ setzen. Für die Unterraumtopologie setzen wir $I = \{1\}$ und X_1 ist der größere Raum, $f_1: X \to X_1$ die Inklusion.

Analog zur Analysis gilt auch hier, dass eine Folge in einem Produktraum genau dann konvergiert, wenn jede ihrer Komponentenfolgen konvergiert.

Satz 2.16. *Sei $(x^{(n)})$ eine Folge in $\prod_{i\in I} X_i$ mit Komponentenfolgen $(x_i^{(n)}) \subseteq X_i$. Dann konvergiert $(x^{(n)})$ genau dann gegen $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$, wenn für alle $i \in I$ die Folge $(x_i^{(n)})$ in X_i gegen x_i konvergiert.*

2.3. **Quotienten.** Für Quotienten erinnern wir an die Definition einer Äquivalenzrelation.

Definition 2.17. Sei X eine Menge. Eine **Äquivalenzrelation** auf X ist eine Teilmenge $R \in X \times X$, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Wir schreiben für $(x, y) \in R$ auch $x \sim y$ (und nennen dann $\sim$ die Äquivalenzrelation) und die Bedingungen werden dann zu

(a) Reflexivität: $x \sim x$ für alle $x \in X$.
(b) Symmetrie: $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$.
(c) Transitivität: Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt, dass auch $x \sim z$.

Die **Äquivalenzklasse** eines Elementes $x \in X$ ist dann $[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit $X/_\sim$ und definieren die **Projektion** $\pi: X \to X/\sim$ durch $x \mapsto [x]$.

Bemerkung 2.18. (a) Zwei Äquivalenzklassen sind entweder gleich oder disjunkt wegen der Transitivität. Wegen der Reflexivität ist X die Vereinigung der Äquivalenzklassen.

(b) Andersrum definiert jede Zerlegung von X in disjunkte Teilmengen eine Äquivalenzrelation durch $x \sim y$ genau dann, wenn x und y in der gleichen Teilmenge liegen. Insbesondere können wir für eine Teilmenge $A \subseteq X$ den Quotienten X/A definieren, indem wir X so in disjunkte Teilmengen zerlegen, dass A eine dieser Teilmengen ist und alle anderen einpunktige Mengen sind.

Definition 2.19. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann ist die **Quotiententopologie** $\mathcal{O}_\sim$ definiert durch $V \in \mathcal{O}_\sim$ genau dann, wenn $\pi^{-1}(V) \in \mathcal{O}$.

Man prüft leicht nach, dass dies tatsächlich eine Topologie definiert. Wir beschreiben auch diese Topologie durch eine universelle Eigenschaft.

Satz 2.20. (a) *$\mathcal{O}_\sim$ ist die feinste Topologie auf $X/_\sim$, so dass die Projektion π stetig ist.*

(b) *Es gibt genau eine Topologie auf $X/_\sim$, die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: eine Abbildung $f: X/_\sim \to Y$ genau dann stetig ist, wenn $f \circ \pi: X \to Y$ stetig ist.*

Bemerkung 2.21. Wie man die Unterraum- und die Produkttopologie als Initialtopologie auffassen kann, gibt es auch in Fall der Quotiententopologie eine allgemeinere Beschreibung analog zur universellen Eigenschaft. Sei dazu X_i eine Familie von topologischen Räumen X_i und Abbildungen $f_i: X_i \to X$ gegeben. Dann ist die **Finaltopologie** auf X die eindeutige Topologie, so dass eine Abbildung $g: X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn alle Kompositionen $g \circ f_i: X_i \to Y$ stetig sind.

Für den Spezialfall der Quotiententopologie brauchen wir keine Familie, sondern nur ein X und die Abbildung f ist die Projektion $\pi: X \to X/_\sim$.

Beispiel 2.22. Wir können den topologischen Raum aus Beispiel 1.37 als Quotienten schreiben. Sei dazu $X = \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ mit Koordinaten x und y in den beiden Kopien von $\mathbb{R}$. Dann definieren wir die Äquivalenzrelation durch $x \sim y$ genau dann, wenn x und y die gleiche reelle Zahl ungleich Null sind. Für x_1, x_2 (oder y_1, y_2) in der gleichen Kopie von $\mathbb{R}$ sei $x_1 \sim x_2$ genau dann, wenn $x_1 = x_2$. Damit haben wir immer noch 'zwei Nullen', aber sonst nur noch eine Kopie von $\mathbb{R}$, also genau den Raum mit einem zusätzlichen Punkt, dessen Umgebungen genauso aussehen wie Umgebungen um 0.

Der folgende Satz ist eine topologische Version des Homomorphiesatzes aus der (linearen) Algebra.

Satz 2.23. *Seien X und Y topologische Räume und $f: X \to Y$ surjektiv und stetig. Definiere auf X eine Äquivalenzrelation durch $x_1 \sim x_2$, wenn $f(x_1) = f(x_2)$. Dann ist die induzierte Abbildung $\tilde{f}: X/_\sim \to Y$ mit $\tilde{f}([x]) = f(x)$ wohldefiniert, stetig und bijektiv, wenn $X/_\sim$ die Quotiententopologie trägt. Wenn f offen ist, dann ist $\tilde{f}$ sogar ein Homöomorphismus.*

Beispiel 2.24.

(a) Sei $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie. Wir betrachten den Gruppenquotienten $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, den wir auch als Quotienten nach der Äquivalenzrelation $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in \mathbb{Z}$ schreiben können, mit der Quotiententopologie. Sei nun $f: \mathbb{R} \to S^1$ die Abbildung $x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$, wobei S^1 der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ mit der Unterraumtopologie ist.

   Man prüft leicht nach, dass f stetig, surjektiv und offen ist. Damit können wir den Kreis S^1 mit dem Quotienten $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ als topologische Räume identifizieren, denn mit $\tilde{f}$ haben wir einen Homöomorphismus von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ zu S^1.

(b) Analog könnte man auch einfach das Intervall $[0, 1]$ nehmen und die Endpunkte 'zusammenkleben', dies würde die gleiche Konstruktion des Kreises S^1 ergeben.

(c) Genauso bekommt man für den Torus $S^1 \times S^1$ die gleiche Topologie, wenn man ihn als Produkt, als 'Reifenoberfläche' im $\mathbb{R}^3$ oder als Quotient eines Quadrates in $\mathbb{R}^2$ mit passender Identifizierung der Seiten betrachtet.

(d) Die allgemeinen Einheitssphären in $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ kann man auf diese Weise auch beschreiben, indem man den abgeschlossenen Ball im $\mathbb{R}^n$ nimmt und den Rand zu einem Punkt zusammenzieht. Auch hier bekommt man die gleiche Topologie als Unterraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ und als Quotient.

Bemerkung 2.25. Wir müssen also im Beispiel $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ unterscheiden, ob der algebraische (Gruppen-)Quotient S^1 gemeint ist oder der topologische Quotient, der genau alle ganzen

Zahlen miteinander identifiziert. Letzterer sind unendlich viele Kreise, die alle einen Punkt gemeinsam haben. Nämlich je ein Kreis für jedes Intervall $[n, n+1]$ für $n \in \mathbb{Z}$.

3. Zusammenhang

Als nächstes schauen wir uns an, wie man topologisch beschreiben kann, ob ein Raum (oder eine Teilmenge davon) zusammenhängend ist. Geometrisch ist das klar, formal nicht ganz so einfach, wie es aussieht.

Definition 3.1. (a) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **zusammenhängend**, wenn X und $\varnothing$ die einzigen Mengen sind, die offen und abgeschlossen sind.
(b) Für einen Punkt $x \in X$ in einem topologischen Raum ist die **Zusammenhangskomponente** von x die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X, die x enthalten.
(c) Ein topologischer Raum heißt **total unzusammenhängend**, wenn alle Zusammenhangskomponenten nur aus jeweils einem Punkt bestehen.
(d) Ein topologischer Raum heißt **lokal zusammenhängend**, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus zusammenhängenden Mengen hat.

Ein zusammenhängender Raum wird oft auch so definiert, dass X zusammenhängend ist, wenn es keine zwei disjunkten offenen Mengen U, V gibt, so dass $X = U \cup V$ und $U, V \neq \varnothing$. Diese Definition ist zu obiger Definition äquivalent, weil in dieser Definition U, V offen und abgeschlossen wären, wenn es solche Mengen gäbe. Für Beweise werden wir meistens diese Charakterisierung benutzen.

Beispiel 3.2. (a) Nicht zusammenhängend sind natürlich Räume der Form $Z = X \sqcup Y$ mit der Summentopologie, auch wenn X und Y zusammenhängend sind. Wenn aber X und Y beide lokal zusammenhängend sind, dann ist auch Z lokal zusammenhängend, denn wir können die Umgebungsbasen in X bzw. Y auch in Z betrachten.
(b) Andersrum gibt es auch zusammenhängende Räume, die nicht lokal zusammenhängend sind. Betrachte dazu $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Dieser Raum ist zusammenhängend, aber jede Umgebung eines Punktes der Form $(0, s) \in X$ mit $s > 0$ enthält unendlich viele Zusammenhangskomponenten.
(c) Total unzusammenhängend ist zum Beispiel $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

Satz 3.3. *Sei $A \subseteq X$ zusammenhängend und $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Dann ist auch B zusammenhängend.*

Beweis. Sei $B \subseteq U \cup V$ mit U, V offen in X und $\tilde{U} = B \cap U, \tilde{V} = B \cap V \neq \varnothing$. Dann ist $B = \tilde{U} \cup \tilde{V}$ mit $\tilde{U}, \tilde{V} \neq \varnothing$. Wir zeigen, dass $\tilde{U} \cap \tilde{V}$ nicht leer sein kann, dass also $B \cap U \cap V \neq \varnothing$. Wegen $B \subseteq \overline{A}$ sind $A \cap U$ und $A \cap V$ beide nicht leer und $A \subseteq B \subseteq U \cup V$. Da A zusammenhängend ist, gilt damit $A \cap U \cap V \neq \varnothing$ und wegen $A \subseteq B$ folgt die Behauptung. □

Satz 3.4. *Sei X ein topologischer Raum und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von zusammenhängenden Teilmengen. Wenn es einen Punkt $p \in \bigcap_{i \in I} A_i$ gibt, dann ist $Z = \bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.*

Insbesondere ist also die Zusammenhangskomponente jedes Punktes $x \in X$ zusammenhängend. Nach dem vorigen Satz ist die Zusammenhangskomponente auch abgeschlossen, da der Abschluss der Zusammenhangskomponente wieder zusammenhängend ist.

Korollar 3.5. *Jeder topologische Raum X ist als Menge die disjunkte Vereinigung der Zusammenhangskomponenten.*

Vorsicht: Dies gilt wirklich nur als Mengen, die Topologie auf X muss nicht unbedingt die Summentopologie der disjunkten Vereinigung sein!

In $\mathbb{R}$ sind die zusammenhängenden Teilmengen gerade das, was man sich darunter vorstellt.

Satz 3.6. *Zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Intervalle und jedes Intervall ist zusammenhängend.*

Eine weitere anschauliche Version von Zusammenhang ist, dass je zwei Punkte miteinander verbunden werden können. Dies führt zu folgender Definition, die im Allgemeinen nicht zu obiger Definition äquivalent ist.

Definition 3.7.
(a) Ein **Weg** in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon[0,1]\to X$.
(b) Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x,y\in X$ einen Weg gibt mit $\gamma(0)=x$ und $\gamma(1)=y$.
(c) Die Menge aller Punkt, die sich durch einen Weg in X mit $x\in X$ verbinden lassen, heißt die **Wegzusammenhangskomponente** von x in X.
(d) Ein topologischer Raum heißt **lokal wegzusammenhängend**, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden Mengen hat.

Bemerkung 3.8.
(a) An der Stelle von $[0,1]$ könnte auch jedes andere abgeschlossene Intervall $[a,b]$ stehen, denn $\varphi(t)=a+(b-a)t$ ist ein Homöomorphismus von $[0,1]$ nach $[a,b]$.
(b) Dass zwei Punkte durch einen Weg verbunden werden können, ist eine Äquivalenzrelation. Für die Reflexivität wählen wir $\gamma(t)=x$ als konstanten Weg. Für die Symmetrie drehen wir den Weg um und betrachten $\tilde{\gamma}(t)=\gamma(1-t)$. Für die Transitivität hängen wir zwei Wege aneinander durch
$$\gamma(t)=(\gamma_1\cdot\gamma_2)(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t) & t\in[0,\frac{1}{2}]\\ \gamma_2(2t-1) & t\in(\frac{1}{2},1].\end{cases}$$
Wir laufen also den Weg γ_1 im Intervall $[0,\frac{1}{2}]$ und den Weg γ_2 im Intervall $[\frac{1}{2},1]$. Dies ist wohldefiniert und ein Weg, wenn $\gamma_1(1)=\gamma_2(0)$.

Satz 3.9.
(a) *Das Bild eines (weg-)zusammenhängenden Raumes unter einer stetigen Abbildung $f\colon X\to Y$ ist wieder (weg-)zusammenhängend.*
(b) *Jeder wegzusammenhängende Raum ist auch zusammenhängend.*

Teil a) verallgemeinert den Zwischenwertsatz der Analysis, denn dieser besagt gerade, dass das Bild einer stetigen Funktion $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ das ganze Intervall zwischen zwei Bildpunkten $f(a)$ und $f(b)$ enthält.

Mit b) sieht man dann auch, dass der Raum aus Beispiel 3.2 b) zusammenhängend ist, denn er ist offensichtlich wegzusammenhängend.

Bemerkung 3.10. Die Umkehrung von b) ist im Allgemeinen falsch. Ein Beispiel ist die sogenannte **topologische Sinuskurve** $X = (0,0) \cup (x, \sin(\frac{1}{x})) \subseteq \mathbb{R}^2$ für $x \in (0,1]$. Dieser Raum ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. Denn jede Umgebung von $(0,0)$ enthält Punkt des Graphen, es gibt aber in X keinen Weg von $(0,0)$ zu Punkten des Graphen.

Wichtig sind vor allem lokal wegzusammenhängende Räume, denn in diesen Räumen ist Wegzusammenhang das gleiche wie Zusammenhang.

Lemma 3.11. *Wenn X lokal wegzusammenhängend ist, dann sind die Wegzusammenhangskomponenten offen und abgeschlossen.*

Satz 3.12. *Sei X lokal wegzusammenhängend. Dann ist X genau dann zusammenhängend, wenn X wegzusammenhängend ist.*

Zusammenhang und Wegzusammenhang sind auch mit Produkt- und Quotientenbildung verträglich, aber offensichtlich nicht mit Unterräumen oder Summen von topologischen Räumen. Denn zum Beispiel kann man als Unterraum zwei disjunkte Intervalle in $\mathbb{R}$ betrachten, dieser Raum ist natürlich nicht zusammenhängend. Bei der Summe von topologischen Räumen sieht man direkt an der Definition der Topologie, dass die Summe nicht zusammenhängend ist, denn beide Räume sind offen und abgeschlossen.

Satz 3.13.
(a) *Sei $X = \prod_{i \in I} X_i \neq \varnothing$. Dann ist X genau dann (weg-) zusammenhängend, wenn alle X_i (weg-) zusammenhängend sind.*
(b) *Sei X (weg-) zusammenhängend und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann ist auch der Quotient $X/_\sim$ (weg-) zusammenhängend.*

4. Trennungsaxiome

In diesem Kapitel schauen wir uns weitere Definitionen an, die Begriffe und anschauliche Ideen aus der Analysis in die Sprache der Topologie übertragen.

4.1. **Definitionen und Eigenschaften.** Wir geben zunächst eine Reihe von Definitionen und untersuchen dann, wie diese sich zueinander verhalten.

Definition 4.1. Sei X ein topologischer Raum.

(a) X erfüllt **(T1)**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine offene Menge gibt, die x enthält, aber nicht y.
(b) X heißt **Hausdorff** oder erfüllt **(T2)**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ zwei disjunkte offene Mengen U, V gibt mit $x \in U$ und $y \in V$.
(c) X erfüllt **(T3)**, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge A und jedem Punkt $x \in A^c$ disjunkte offene Mengen U, V gibt mit $A \subseteq U$ und $x \in V$.
(d) X erfüllt **(T4)**, wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen A, B zwei disjunkte offene Mengen U, V gibt mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$.
(e) X heißt **regulär**, wenn X die Eigenschaften (T1) und (T3) erfüllt und **normal**, wenn X die Eigenschaften (T1) und (T4) erfüllt.

Die Bedingungen (T1) bis (T4) heißen auch **Trennungsaxiome** (daher die Bezeichnungen mit T wie Trennung), weil sie beschreiben, wie sich Punkte oder abgeschlossene Mengen voneinander trennen lassen.

Bemerkung 4.2. (a) (T1) ist äquivalent dazu, dass alle einpunktigen Mengen abgeschlossen sind.
(b) Offensichtlich erfüllt jeder Hausdorff-Raum auch (T1).
(c) Jeder normale Raum ist regulär, denn wegen (T1) können wir den Punkt als abgeschlossene Menge auffassen.
(d) Jeder reguläre Raum ist Hausdorff, denn auch hier können wir wegen (T1) einen der Punkte als abgeschlossene Menge ansehen und dann folgt die Hausdorffeigenschaft mit (T3).

Beispiel 4.3. (a) Jeder metrische Raum ist Hausdorff, denn zwei Punkte x, y können für $2r = d(x, y)$ durch die offenen Bälle $B_r(x)$ und $B_r(y)$ getrennt werden.
(b) Der Raum aus Beispiel 1.37 der reellen Achse mit einer zusätzlichen Null ist (T1), aber nicht Hausdorff. Denn es gibt keine zwei disjunkten offenen Mengen, die $0 \in \mathbb{R}$ und den zusätzlichen Punkt p trennen, aber es gibt offene Umgebungen von 0, die p nicht enthalten und umgekehrt.
(c) Wenn wir auf $\mathbb{R}$ die feinere Topologie als die übliche benutzen, die zusätzlich $\mathbb{Q}$ als offene Menge hat (und damit auch Schnitte offener Intervalle mit $\mathbb{Q}$ und Vereinigungen solcher Mengen), dann ist $\mathbb{R}$ immer noch Hausdorff (mit den gleichen offenen Mengen), aber nicht (T3), denn die irrationalen Zahlen sind abgeschlossen, lassen sich aber nicht von $0 \in \mathbb{Q}$ trennen.
(d) Ein (T3)-Raum muss auch nicht (T4) sein. Beispiele hierfür ist die Sorgenfrey-Ebene, die als Menge $\mathbb{R}^2$ ist, aber mit der Produkttopologie, wenn man auf $\mathbb{R}$

zusätzlich zu den offenen Intervallen auch die linksabgeschlossenen Intervalle $[a,b)$ als Basis der Topologie betrachtet. Mit dieser Topologie ist $\mathbb{R}$ regulär und sogar normal, aber $\mathbb{R}^2$ mit dieser Produkttopologie ist zwar regulär, aber nicht normal. Der Beweis ist allerdings recht aufwändig, siehe Munkres: Topology (2. ed), Abschnitt 31, Beispiel 3.

Grob gesagt geht es bei den Trennungsaxiomen darum, dass es genug offene Mengen geben soll, um pathologische Beispiele auszuschließen wie die Konvergenz jeder Folge gegen jeden Punkt in der trivialen Topologie. Die am häufigsten geforderte Eigenschaft ist die Hausdorff-Eigenschaft (T2).

Satz 4.4. *In einem Hausdorff-Raum sind Grenzwerte von Folgen eindeutig.*

Am Beispiel der doppelten Null in Beispiel 1.37 haben wir bereits gesehen, dass (T1) dafür nicht ausreicht.

Satz 4.5. *Jeder metrische Raum ist normal.*

Die Trennungseigenschaften beeinflussen auch das Verhalten stetiger Funktionen. Auch hier sieht man wieder, dass die Hausdorffeigenschaft wichtig ist, damit sich Dinge so verhalten wie aus der Analysis bekannt.

Satz 4.6. *Seien X, Y topologische Räume, Y sei Hausdorff und $f\colon X \to Y$ sei stetig.*
(a) *Die Menge $Z = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen.*
(b) *Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ mit $f|_A = g|_A$ gilt auch $f|_{\overline{A}} = g|_{\overline{A}}$.*
(c) *Seien $x, \tilde{x} \in X$, so dass es keine disjunkten offenen Mengen U, V gibt mit $x \in U$ und $\tilde{x} \in V$. Dann gilt $f(x) = f(\tilde{x})$.*

Wir schauen uns noch an, wie sich Trennungseigenschaften verhalten, wenn man topologische Räume aus anderen konstruiert.

Satz 4.7. (a) *Unterräume von (T1)- oder Hausdorff-Räumen sind wieder (T1) bzw. Hausdorff. Für (T3) und (T4) gilt dies nur für abgeschlossene Unterräume.*
(b) *Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so dass $X/_\sim$ ein (T1)-Raum ist. Dann ist $[x] \subseteq X$ abgeschlossen.*
(c) *Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ mit $X \neq \varnothing$. Dann ist X genau dann (T1) oder Hausdorff, wenn alle X_i die Eigenschaft (T1) erfüllen bzw. Hausdorff sind.*

Bemerkung 4.8. Unter Quotientenbildung bleiben im Allgemeinen keine Trennungseigenschaften erhalten. Im Beispiel 1.37 bleibt nur (T1) erhalten, alle anderen Trennungseigenschaften vom normalen Raum $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ gehen verloren.

Wenn man in $\mathbb{R}$ einfach alle rationalen Zahlen als äquivalent ansieht, dann geht sogar (T1) verloren, weil $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt.

4.2. **Das Lemma von Urysohn.** Im Beweis von Satz 4.5 haben wir bereits gesehen, dass auch stetige Funktionen dazu benutzt werden können, abgeschlossene Mengen zu trennen. Ähnliches funktioniert auch ohne Metrik, dann ist die Konstruktion der Funktion allerdings deutlich schwieriger.

Satz 4.9 (Lemma von Urysohn). *Sei X ein (T4)-Raum. Dann gibt es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen $A, B \subseteq X$ eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$, so dass $A \subseteq f^{-1}(0)$ und $B \subseteq f^{-1}(1)$.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, brauchen wir noch ein Lemma.

Lemma 4.10. *Ein topologischer Raum ist genau dann (T4), wenn es für jede abgeschlossene Menge A und jede offene Menge U mit $A \subseteq U$ eine offene Menge V gibt, so dass $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Bemerkung 4.11. Wenn man nicht zwei abgeschlossene Mengen, sondern wie in (T3) eine abgeschlossene Menge und einen Punkt außerhalb dieser Menge betrachtet, findet man eine analoge Eigenschaft auch als Trennungsaxiom (T3a) oder auch als (T3,5) bezeichnet. Dafür fordert man dann, dass für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ für jedes $x \in X \smallsetminus A$ eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ existiert mit $f(x) = 1$ und $A \subseteq f^{-1}(0)$.

4.3. **Der Erweiterungssatz von Tietze.** Das Lemma von Urysohn hat noch eine Verallgemeinerung über stetige Fortsetzungen von Funktionen, die zunächst nur auf abgeschlossenen Mengen definiert sind.

Satz 4.12 (Erweiterungssatz von Tietze). *Sei X ein (T4)-Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \to [0,1]$ stetig. Dann gibt es eine stetige Funktion $F : X \to [0,1]$, so dass $F|_A = f$ ist.*

Bemerkung 4.13.
(a) Natürlich gilt das analoge Resultat auch für jedes andere Intervall als $[0,1]$. Mit etwas mehr Aufwand kann man sogar beschränkte offene Intervalle benutzen.
(b) Genauer ist die Erweiterungsbedingung sogar äquivalent zu (T4), denn wir können für zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen A, B eine stetige Funktion auf der abgeschlossenen Menge $A \cup B$ durch $f(A) = 0$ und $f(B) = 1$ definieren. Für die Fortsetzung F dieser Funktion erhalten wir mit $U = F^{-1}((-\infty, \frac{1}{2}))$ und $V = F^{-1}((\frac{1}{2}, \infty))$ die geforderten disjunkten, offenen Mengen, die A und B trennen.

Für den Beweis brauchen wir noch einige Vorarbeit über gleichmäßige Konvergenz.

Definition 4.14. Sei X ein topologischer und Y ein metrischer Raum.
(a) Sei $(f_n : X \to Y)$ eine Folge von Funktionen. Dann heißt (f_n) **gleichmäßig konvergent** gegen eine Funktion $f : X \to Y$, wenn $\sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) \to 0$.
(b) Auf dem Raum der Funktionen $\mathrm{Abb}(X, Y)$ können wir eine Metrik definieren durch

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Die von dieser Metrik induzierte Topologie auf $\mathrm{Abb}(X, Y)$ heißt **Topologie der gleichmäßigen Konvergenz**.

Bemerkung 4.15.
(a) Für diese Definition brauchen wir die Metrik auf Y, da wir nur mit topologischen Begriffen den Abstand von f_n zu f an verschiedenen Punkten von X nicht vergleichen können.

(b) Man kann die verschiedenen Konvergenzbegriffe aus der Analysis auf verschiedene Topologien auf Funktionenräumen zurückführen. Die **Topologie der punktweisen Konvergenz** die Produkttopologie des Produkts $\mathrm{Abb}(X,Y) = \prod_{x\in X} Y$ nach Satz 2.16, denn punktweise Konvergenz der Funktionenfolge ist gerade die Konvergenz der Komponentenfolgen in diesem Produkt. Im Allgemeinen ist diese Topologie nicht metrisierbar und gröber als die der gleichmäßigen Konvergenz, denn jede gleichmäßig konvergente Funktionenfolge konvergiert auch punktweise, nicht aber andersrum.

Wie in der Analysis liefert gleichmäßige Konvergenz auch in dieser Allgemeinheit Aussagen über die Grenzwertfunktion.

Satz 4.16. *Sei X wieder ein topologischer Raum und Y ein metrischer Raum.*

(a) *Wenn alle Funktionen $f_n\colon X \to Y$ stetig sind und $f_n \to f$ gleichmäßig konvergiert, dann ist auch f stetig.*
(b) *Sei nun Y zusätzlich vollständig. Wenn die Folge (f_n) mit $f_n\colon X \to A \subseteq Y$ das Cauchykriterium (in der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz) erfüllt, dann gibt es ein $f\colon X \to \overline{A}$, so dass $f_n \to f$ gleichmäßig konvergiert.*

Für den Beweis des Erweiterungssatzes finden wir die gesuchte Fortsetzung als gleichmäßigen Grenzwert einer Funktionenfolge, die wir zunächst als Lemma konstruieren. Im Folgenden sei X ein (T4)-Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen.

Lemma 4.17. *Sei $f\colon A \to [-1,1]$. Es gibt eine Folge stetiger Funktionen $g_n\colon X \to \mathbb{R}$, die folgende Bedingungen erfüllt:*

(a) *Für alle $x \in X$ ist $g_n(x) \in \left[-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n, 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$.*
(b) *Für alle $x \in A$ gilt $|f(x) - g_n(x)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$.*
(c) *Für alle $x \in X$ gilt $|g_{n+1}(x) - g_n(x)| \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.*
(d) *Für alle $x \in X$ und $p \in \mathbb{N}$ gilt $|g_n(x) - g_m(x)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^p$ für alle $m, n \ge p$.*

Mit diesem Lemma folgt der Erweiterungssatz von Tietze sofort.

5. Kompaktheit

Ein weiterer zentraler Begriff der Analysis ist in Wahrheit ein topologischer Begriff, nämlich Kompaktheit. In topologischen Räumen muss man allerdings verschiedene Arten von Kompaktheit unterscheiden.

5.1. Definitionen und erste Eigenschaften.

Definition 5.1. Sei X ein topologischer Raum.

(a) X heißt **quasikompakt**, wenn es zu jeder offenen Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung gibt. Für jede Familie offener Mengen $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ mit $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ gibt es endlich viele $i_1, \dots, i_n \in I$, so dass bereits $X = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$ gilt.
(b) Wir nennen X **kompakt**, wenn X quasikompakt und Hausdorff ist.
(c) X heißt **folgenkompakt**, wenn X Hausdorff ist und jede Folge eine konvergente Teilfolge hat.
(d) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist (quasi- / folgen-) kompakt, wenn A mit der Unterraumtopologie die entsprechende Eigenschaft hat.

Bemerkung 5.2. Vorsicht: manchmal wird der Begriff der Kompaktheit auch für das verwendet, was wir hier quasikompakt nennen. In der Literatur muss man daher aufpassen.

Wir sammeln zunächst einige Eigenschaften von kompakten Mengen.

Satz 5.3. (a) *Abgeschlossene Unterräume von (quasi- / folgen-) kompakten Räumen sind wieder (quasi- / folgen-) kompakt.*
(b) *Sei X Hausdorff und $A \subseteq X$ kompakt. Dann ist A abgeschlossen in X.*
(c) *Sei X Hausdorff und $A_i \subseteq X$ kompakt für $i \in I$. Dann ist $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ kompakt.*
(d) *Seien $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ kompakt und X Hausdorff. Dann ist auch $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ kompakt.*
(e) *Sei X quasikompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist das Bild $f(X) \subseteq Y$ quasikompakt. Wenn Y Hausdorff ist, ist das Bild eines quasikompakten Raumes X sogar kompakt.*
(f) *Jeder kompakte Raum ist normal.*

Aus b) folgt sofort, dass Quotienten quasikompakter Räume wieder quasikompakt sind. Da sich die Hausdorffeigenschaft nicht unbedingt auf Quotienten überträgt, gilt das aber wirklich nur für die Überdeckungseigenschaft.

In schönen Räumen sind bijektive, stetige Funktionen bereits Homöomorphismen, man muss dann die Offenheit also nicht mehr gesondert zeigen.

Satz 5.4. *Sei X quasikompakt, Y Hausdorff und $f\colon X \to Y$ stetig. Wenn f bijektiv ist, dann ist f ein Homöomorphismus.*

Kompaktheit und Folgenkompaktheit sind im Allgemeinen nicht äquivalent, sondern man braucht dazu die Abzählbarkeitsaxiome.

Satz 5.5. *Ist X quasikompakt und erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, dann ist X auch folgenkompakt. Erfüllt X sogar das zweite Abzählbarkeitsaxiom, dann gilt auch die Umkehrung.*

Insbesondere haben wir damit ein Resultat für metrische Räume, das erklärt, warum in der Analysis nicht zwischen folgenkompakt und kompakt unterschieden wird.

Korollar 5.6. *In metrischen Räumen ist Kompaktheit äquivalent zu Folgenkompaktheit.*

Wir wissen bereits, dass metrische Räume Hausdorff sind und das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Im Beweis zeigen wir, dass folgenkompakte metrische Räume sogar das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen.

Korollar 5.7. *In endlichdimensionalen, normierten $\mathbb{R}$-Vektorräumen sind kompakte Mengen genau die Mengen A, die abgeschlossen und beschränkt sind.*

Mit diesem Korollar haben wir auch die Aussage, dass reellwertige stetige Funktionen auf kompakten Mengen Maximum und Minimum annehmen. Denn wir wissen bereits, dass das Bild kompakter Mengen in Hausdorffräumen wieder kompakt ist und jede kompakte Menge in $\mathbb{R}$ hat ein Maximum und ein Minimum.

Bemerkung 5.8. Man kann zeigen, dass die Topologie eines kompakten Raumes genau dann von einer Metrik kommt, wenn der Raum Hausdorff ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Um Beispiele von kompakten Räumen zu konstruieren, die nicht folgenkompakt sind, muss man also ziemlich hässliche Räume betrachten, die diese Bedingungen nicht erfüllen.

Als nächstes schauen wir uns wieder an, wie sich Kompaktheit unter den Konstruktionen topologischer Räume verhält.

Satz 5.9.
(a) *Endliche Summen von kompakten Räumen sind wieder kompakt.*
(b) *Quotienten eines quasikompakten Raumes sind wieder quasikompakt.*

Für Produkte formulieren wir den Satz gesondert.

Satz 5.10 (Tychonoff)**.** *Sei I eine Indexmenge und für alle $i \in I$ sei X_i ein kompakter topologischer Raum. Dann ist auch $X = \prod_{i\in I} X_i$ kompakt.*

Zunächst beweisen wir den endlichen Fall, der recht anschaulich geht. Für den allgemeinen Fall brauchen wir im nächsten Abschnitt erstmal einige Grundlagen. Dafür beweisen wir zunächst folgende Aussage.

Lemma 5.11. *Sei Y kompakt und $Z = X \times Y$. Wenn $N \subseteq Z$ offen ist und $\{x_0\} \times Y \subseteq N$ gilt, dann gibt es eine Umgebung $W \in \mathcal{U}(x_0)$, so dass $W \times Y \subseteq N$ ist.*

Wenn Y nicht kompakt ist, stimmt diese Aussage offensichtlich nicht, zum Beispiel für $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < e^x\}$.

Damit können wir nun den endlichen Fall des Satzes von Tychonoff beweisen. Induktiv reicht es dafür, den Fall $Z = X \times Y$ zu behandeln.

5.2. **Netze und Filter.** Das Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis der allgemeinen Form des Satzes von Tychonoff. Dafür braucht man weitere Grundlagen, zumindest das Lemma von Zorn oder den dazu äquivalenten Wohlordnungssatz.

Man konstruiert dazu Verallgemeinerungen des Folgenbegriffes, die topologisch bessere Eigenschaften haben.

Definition 5.12. Eine (Index-)Menge I heißt **gerichtet**, wenn es eine Relation $\leq$ auf ihr gibt mit folgenden Eigenschaften:

(a) Es gilt $i \leq i$ für alle $i \in I$.
(b) Aus $i \leq j$ und $j \leq k$ folgt $i \leq k$.
(c) Zu je zwei Elementen $i, j \in I$ gibt es ein $k \in I$, so dass $i \leq k$ und $j \leq k$.

Das strikte Ungleichheitszeichen $i < j$ bedeutet auch hier wieder $i \leq j$ und $i \neq j$.

Wir fordern also keine Antisymmetrie wie bei einer Halbordnung, dafür aber die obere Schranke in c).

Definition 5.13. (a) Ein **Netz** auf einer Menge X ist eine Abbildung $I \to X$ mit einer gerichteten Menge I. Wir bezeichnen das Bild von $i \in I$ mit x_i und das ganze Netz mit $(x_i)_I$.
(b) Ein Netz auf einem topologischen Raum X heißt **konvergent** gegen $x \in X$, wenn es für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $i_0 \in I$ gibt mit $x_i \in U$ für alle $i \geq i_0$.

Beispiel 5.14. (a) Die natürlichen Zahlen sind mit der gewöhnlichen Ungleichung $\leq$ gerichtet. Netze mit Indexmenge $\mathbb{N}$ sind gerade Folgen und die Konvergenzdefinitionen stimmen überein.
(b) Für $x \in X$ ist die Menge der Umgebungen gerichtet mit $U \leq V$ wenn $V \subseteq U$. Ein Netz $(x_U)_{\mathcal{U}(x)}$ mit $x_U \in U$ konvergiert offensichtlich gegen x.

Wir haben also eine echte Verallgemeinerung des Folgenbegriffes. Der folgende Satz zeigt, dass Netze in topologischen Räumen ohne das 1. Abzählbarkeitsaxiom besser geeignet sind als Folgen.

Satz 5.15. *Seien X, Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$*

(a) *Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist $\overline{A} = \{x \in X \mid \exists (x_i)_I \subseteq A \text{ Netz mit } (x_i) \to x\}$.*
(b) *Die Abbildung f ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn für jedes Netz $(x_i)_I$ mit $(x_i) \to x$ gilt, dass das Netz $(y_i = f(x_i))_I$ gegen $y = f(x)$ konvergiert.*

Bemerkung 5.16. Beachten Sie, dass für Folgen im Allgemeinen nur $\supseteq$ in a) und $\Rightarrow$ in b) gelten. Für die anderen Richtungen brauchten wir in Satz 1.38 das erste Abzählbarkeitsaxiom. Da bei einem Netz die Indexmenge nicht mehr unbedingt abzählbar sein muss, brauchen wir das hier nicht mehr.

Man sieht am Beweis, dass insbesondere die gerichtete Menge der Umgebungen von x topologische sinnvoller ist also die Indexmenge $\mathbb{N}$ für Folgen. Statt mit Punkten können wir auch direkt mit Mengensystemen arbeiten, die sich ähnlich wie Umgebungsmengen verhalten.

Definition 5.17. Ein **Filter** auf einer Menge X ist ein System $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen mit folgenden Eigenschaften:

(a) Es gilt $X \in \mathcal{F}$, aber $\varnothing \notin \mathcal{F}$.
(b) Für $F, G \in \mathcal{F}$ gilt auch $F \cap G \in \mathcal{F}$.
(c) Für $F \in \mathcal{F}$ und $G \supseteq F$ gilt auch $G \in \mathcal{F}$.

Das sind also die gleichen Bedingungen wie bei Umgebungen bezüglich Schnitten und Vereinigungen. Zu Filtern brauchen wir noch einige Zusatzbegriffe.

Definition 5.18. (a) Eine Teilmenge $\mathcal{F}_0$ eines Filters $\mathcal{F}$ heißt **Filterbasis** für $\mathcal{F}$, wenn jedes Element aus $\mathcal{F}$ ein Element aus $\mathcal{F}_0$ enthält.
(b) Sind $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ zwei Filter auf einer Menge X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, so heißt $\mathcal{F}$ **gröber** und $\mathcal{G}$ **feiner**.
(c) Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt **Ultrafilter** auf X, wenn es keinen echt feineren Filter auf X gibt.

Die Definition einer Filterbasis entspricht damit der einer Umgebungsbasis. Wie dort ist ein System $\mathcal{B}$ von nicht-leeren Teilmengen genau dann eine Filterbasis, wenn es für je zwei Elemente $B, C \in \mathcal{B}$ ein Element $A \in \mathcal{B}$ gibt mit $A \subseteq B \cap C$.

Beispiel 5.19. (a) Sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid A \subseteq F\}$ ein Filter und $\mathcal{B} = \{A\}$ eine Filterbasis für $\mathcal{F}$.
(b) Im Spezialfall $A = \{x\}$ erhalten wir einen zweiten Filter durch $\mathcal{U}(x)$, dieser heißt der **Umgebungsfilter** von x. Eine Umgebungsbasis ist dann eine Filterbasis. Wenn $\{x\}$ nicht offen ist, ist dieser gröber als der Filter aus a).
(c) Für eine Folge $(x_n)_\mathbb{N}$ ist das Mengensystem $B_k = \{x_i \mid i \geq k\}$ eine Filterbasis für einen Filter $\mathcal{F}$, den wir als **von $(x_n)_\mathbb{N}$ erzeugten Filter** bezeichnen. Allgemeiner erhält man so auch aus jedem Netz einen davon erzeugten Filter.

Satz 5.20. (a) *Ein Filter $\mathcal{F}$ ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jedes $A \subseteq X$ gilt $A \in \mathcal{F}$ oder $A^c \in \mathcal{F}$.*
(b) *Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, wiederholen wir zunächst das Lemma von Zorn, das man als Axiom der Mengenlehre ansehen kann. Es ist äquivalent zum Auswahlaxiom und zum Wohlordnungssatz.

Satz 5.21 (Lemma von Zorn)**.** *Es sei M eine Menge mit einer Halbordnung $\leq$. Wenn zu jeder total geordneten Teilmenge, also zu jeder Teilmenge $U \subseteq M$ eine obere Schranke existiert, dann gibt es ein maximales Element in $m_0 \in M$.*

In unserem Fall benutzen wir diese Aussage, um den im Satz gesuchten Ultrafilter zu konstruieren.
Als nächstes Definieren wir Berührungspunkte von Konvergenz von Filtern.

Definition 5.22. (a) Ein Punkt $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** eines Filters $\mathcal{F}$, wenn jede Umgebung von x jedes Element des Filters schneidet. Es gilt also $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.
(b) Ein Filter $\mathcal{F}$ konvergiert gegen einen Punkt $x \in X$, wenn gilt $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Wir schreiben dann wieder $\mathcal{F} \to x$ und nennen x Grenzwert des Filters.

Beispiel 5.23. (a) Sei (x_n) eine Folge in X und $\mathcal{F}$ der von der Folge erzeugte Filter. Dann ist ein Punkt $x \in X$ genau dann Häufungspunkt der Folge (d.h., jede Umgebung enthält unendlich viele Folgenglieder), wenn x Berührungspunkt des Filters ist. Die Folge konvergiert genau dann gegen x, wenn der Filter gegen x konvergiert.

(b) Der Abschluss einer nicht-leeren Teilmenge A eines topologischen Raumes besteht genau aus den Berührungspunkten des Filters $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid A \subseteq F\}$, es gilt also $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.

Die Beweise dieser Aussagen sind Übung.

Genau wie bei Folgen die Häufungspunkte Grenzwerte von Teilfolgen sind, können wir auch hier Berührungspunkte durch feinere Filter beschreiben:

Satz 5.24. *Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Berührungspunkt eines Filters $\mathcal{F}$, wenn es einen feineren Filter $\mathcal{G}$ gibt, der gegen x konvergiert.*

Definition 5.25. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Wir bezeichnen mit $f(\mathcal{F})$ den Filter mit Filterbasis $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ und nennen diesen den **Bildfilter** oder das **Bild von $\mathcal{F}$ unter f**.

Satz 5.26. (a) *Das Bild eines Ultrafilters ist wieder ein Ultrafilter.*

(b) *Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig am Punkt $x \in X$, wenn für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{F} \to x$ gilt $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.*

Um mit Hilfe von Filtern den Satz von Tychonoff zu beweisen, brauchen wir noch Aussagen über Filter in Produkträumen. Dafür benutzen wir, dass die Produkttopologie eine Initialtopologie ist und betrachten diesen allgemeineren Fall.

Satz 5.27. *Seien X_i für $i \in I$ topologische Räume und $f_i\colon X \to X_i$ Abbildungen. Wenn X die Initialtopologie trägt, dann konvergiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf X genau dann gegen einen Punkt $x \in X$, wenn alle Bildfilter $\mathcal{F}_i = f_i(\mathcal{F})$ auf X_i gegen $f_i(x)$ konvergieren.*

Als letztes schauen wir uns noch Filter auf Unterräumen an.

Satz 5.28. *Sei X eine Menge, $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $A \subseteq X$.*

(a) *Die Familie $\mathcal{F} \cap A := \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$ bildet genau dann einen Filter auf A, wenn $A \cap F \neq \varnothing$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Dann heißt $\mathcal{F} \cap A$ der* ***Spurfilter*** *von $\mathcal{F}$ auf A.*

(b) *Sei nun $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter mit $A \in \mathcal{F}$. Dann ist auch $\mathcal{F} \cap A$ ein Ultrafilter auf A.*

Korollar 5.29. *Die folgenden Bedingungen sind für eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X und einen Punkt $x \in X$ äquivalent:*

(a) *Es gilt $x \in \overline{A}$.*

(b) *Für den Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ ist $\mathcal{U}(x) \cap A$ ein Filter auf A.*

(c) *Es gibt einen Filter $\mathcal{F}$ auf A, so dass $\iota(\mathcal{F})$ gegen x konvergiert, wobei $\iota\colon A \to X$ die Inklusion ist.*

Zurück zu kompakten topologischen Räumen.

Satz 5.30. *Folgende Aussagen sind für einen topologischen Raum X äquivalent:*

(a) *X ist quasikompakt.*

(b) *Jede Familie abgeschlossener Teilmengen A_i mit $\bigcap_{i \in I} A_i = \varnothing$ besitzt eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$, so dass bereits $\bigcap_{i \in J} A_i = \varnothing$.*

(c) *Jeder Filter besitzt einen Berührungspunkt.*

(d) *Jeder Ultrafilter ist konvergent.*

Auch hier sieht man also, dass Filter geeigneter sind als Folgen, um die Topologie zu beschreiben, denn wir müssen keine Abzählbarkeitsaxiome voraussetzen.

5.3. **Lokalkompaktheit und Baire-Räume.** Wir schauen uns noch Räume an, die lokale Kompaktheitseigenschaften haben. Wir werden sehen, dass diese Räume sich gut mit stetigen Abbildungen vertragen.

Definition 5.31. Ein topologischer Raum X heißt **lokalkompakt**, wenn X Hausdorff ist und jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen hat.

Beispiel 5.32.
(a) Der $\mathbb{R}^n$ ist lokalkompakt, da der Abschluss jedes Balles kompakt ist da abgeschlossen und beschränkt).
(b) In normierten, reellen oder komplexen Vektorräumen sind abgeschlossene Bälle genau dann kompakt, wenn die Dimension endlich ist. Diese Räume sind auch nur im endlich-dimensionalen Fall lokalkompakt.
(c) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^n$ sind nicht lokalkompakt, denn sie sind metrisch, es gibt aber Folgen, die gegen irrationale Punkte konvergieren und daher in $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{Q}^n$ keine konvergente Teilfolge haben können.

Beispiel a) zeigt, dass nicht jeder lokalkompakte Raum auch kompakt sein muss. Andersrum stimmt das aber, wir haben also eine echte Verallgemeinerung des Kompaktheitsbegriffes.

Satz 5.33. *Jeder kompakte Raum X ist lokalkompakt.*

Für den nächsten Satz erinnern wir an Definitionen aus den Übungen:

Definition 5.34. Sei X ein topologischer Raum.
(a) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **G_δ-Menge**, wenn sie als Schnitt von abzählbar vielen offenen Mengen geschrieben werden kann.
(b) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **nirgends dicht**, wenn $(\overline{A})^\circ = \varnothing$ gilt.
(c) Eine Teilmenge heißt **mager** oder **von 1. Kategorie**, wenn sie eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist.
(d) Ist eine Menge nicht mager, so heißt sie **fett** oder **von 2. Kategorie**.
(e) Das Komplement einer mageren Menge heißt **residuell** oder **komager**.

Definition 5.35. Ein Topologischer Raum X heißt **Baire-Raum**, wenn das Komplement jeder mageren Menge dicht in X ist.

Lemma 5.36. *Die folgenden Aussagen über einen topologischen Raum X sind äquivalent:*
(a) *Für jede abzählbare Familie abgeschlossener, nirgends dichter Teilmengen A_i gilt auch $(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)^\circ = \varnothing$.*
(b) *Der Schnitt jeder abzählbaren Familie offener, dichter Mengen ist dicht.*
(c) *Jede offene, nicht-leere Teilmenge von X ist fett.*
(d) *X ist ein Baire-Raum.*

Lemma 5.37. (a) *Jeder vollständige metrische Raum ist ein Baire-Raum.*
(b) *Jeder lokalkompakte Raum ist ein Baire-Raum.*

Satz 5.38. *Jede G_δ-Menge in einem kompakten Raum ist ein Baire-Raum.*

Diese Formulierung ist eine Verallgemeinerung des Lemmas ist, denn sowohl vollständige metrische Räume als auch lokalkompakte Räume lassen sich als G_δ-Mengen in kompakten Räumen schreiben. Im Fall der lokalkompakten Räume zeigen wir dies im nächsten Abschnitt.

Als Abschluss erwähnen wir ohne Beweis noch einige Folgerungen aus dem Satz von Baire, die in der Funktionalanalysis vorkommen.

Satz 5.39 (Satz über die offene Abbildung)**.** *Eine stetige, lineare Abbildung $f\colon X \to Y$ für Banachräume X, Y (vollständige normierte Vektorräume) ist genau dann offen, wenn sie surjektiv ist.*

Satz 5.40 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** *Für eine Familie $f_i\colon X \to Y$ stetiger, linearer Abbildungen von einem Banachraum X in einen normierten Raum Y folgt aus der punktweisen Beschränktheit der f_i bereits die gleichmäßige Beschränktheit.*

Das heißt, wenn für jedes $x \in X$ die Menge $\{f_i(x) \mid i \in I\}$ in Y beschränkt ist, dann gibt es auch eine obere Schranke M für die Operatornormen, also $\|f_i\| = \sup\{f_i(x) \mid \|x\| = 1\} < M$ für alle $i \in I$.

5.4. **Kompaktifizierung.** Wir definieren zuerst, in welcher Form wir topologische Räume kompakt machen wollen.

Definition 5.41. (a) Eine **Einbettung** von X nach Y heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist, also $f\colon X \to f(X)$ ist ein Homöomorphismus.
(b) Eine **Kompaktifizierung** eines topologischen Raumes X ist eine Einbettung von X in einen kompakten Raum.

Insbesondere ist f stetig und injektiv und wir können X mit der Teilmenge $f(X) \subseteq Y$ identifizieren. Eine Kompaktifizierung können wir uns also so vorstellen, dass wir zu X weitere Punkte hinzufügen und die Topologie auf dem neuen Raum so definieren, dass die gegebene Topologie von X die Unterraumtopologie von X als Teilmenge ist.

Auch hier spielt wieder die lokale Kompaktheit eine Rolle, denn lokalkompakte Hausdorffräume haben besonders einfache Kompaktifizierungen.

Satz 5.42. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokalkompakter topologischer Raum. Wenn X nicht kompakt ist, dann gibt es auf $Y = X \sqcup \{x_\infty\}$ genau eine Topologie, so dass Y kompakt ist und die Inklusion $\iota\colon X \to Y$ eine Einbettung ist.*

Beispiel 5.43. Die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ ist die n-Sphäre, also der Rand eines Balles in $\mathbb{R}^{n+1}$. Am einfachsten sieht man dies, wenn man die stereographische Projektion benutze, die die Einheitssphäre $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ohne den Nordpol e_{n+1} homöomorph auf den $\mathbb{R}^n$ abbildet.

Bemerkung 5.44. Da der ursprüngliche lokalkompakte Raum offen in der Kompaktifizierung ist, ist er insbesondere eine G_δ-Menge in der Kompaktifizierung. Man kann auch vollständige metrische Räume so kompaktifizieren, dass der ursprüngliche Raum eine G_δ-Menge in der Kompaktifizierung ist. Somit ist Satz 5.38 eine allgemeinere Form des Satzes von Baire, die sowohl lokalkompakte Räume als auch vollständige metrische Räume mit einschließt.

Für lokalkompakte, aber nicht kompakte Räume kann man bereits charakterisieren, welche Abbildungen sich zu stetigen Abbildungen zwischen den Kompaktifizierungen fortsetzen lassen. Diese Abbildungen haben auch auf den nicht kompakten Räumen schöne Eigenschaften.

Definition 5.45. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **eigentlich**, wenn f stetig ist und das Urbild jeder kompakten Menge in Y wieder kompakt ist.

Satz 5.46. *Seien X, Y wie oben lokalkompakt, aber nicht kompakt. Wir kompaktifizieren beide Räume durch Hinzunahme von x_∞ bzw y_∞ zu Räumen $\hat{X}$ und $\hat{Y}$. Sei nun $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Wir setzen f fort zu $\hat{f}\colon \hat{X} \to \hat{Y}$ durch $f(x_\infty) = y_\infty$.*

Dann ist f genau dann eigentlich, wenn $\hat{f}$ stetig ist.

Als Anwendung betrachten wir noch schöne Eigenschaften eigentlicher Funktionen.

Satz 5.47. *Seien X, Y lokalkompakt und $f\colon X \to Y$ eigentlich.*

(a) *Das Bild abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
(b) *Wenn f bijektiv ist, ist f bereits ein Homöomorphismus.*

5.5. **Metrisierbarkeit.** Jetzt schauen wir uns für kompakte Räume noch an, wie man der Topologie ansehen kann, ob sie von einer Metrik kommt.

Definition 5.48. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **metrisierbar**, wenn es eine Metrik d auf X gibt, so dass $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ die metrische Topologie ist.

Dafür brauchen wir als erstes eine Aussage über Produkte metrischer Räume.

Lemma 5.49. (a) *Für einen metrischen Raum (X, d) gibt es eine Metrik d' auf X, so dass d und d' die gleiche Topologie erzeugen und $d'(x, y) \le 1$ für alle $x, y \in X$ gilt.*
(b) *Ein abzählbares Produkt $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ metrischer Räume (X_i, d_i) ist metrisierbar mit der Metrik*

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i).$$

Bemerkung 5.50. Im Kapitel über die Produkttopologie hatten wir für endliche Produkte metrischer Räume als Produktmetrik das Maximum der Metriken in den Komponenten genommen. Da aber die Summennorm und die Maximumsnorm äquivalent sind, erhalten wir mit der Summe die gleiche Topologie. Für die möglicherweise unendliche Summe hier brauchen wir die Skalierungsfaktoren für die Konvergenz der Reihe, damit die Produktmetrik endliche Werte hat.

Satz 5.51. *Sei $(X,\mathcal{O})$ ein kompakter topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann ist X metrisierbar.*

Bemerkung 5.52. Genauer ist sogar X homöomorph zu einer Teilmenge von $W = \prod i = 1^{\infty}[0,1]$. Die Metrisierbarkeit folgt dann direkt aus obigem Lemma, denn als Produkt ist W metrisierbar und damit auch jede Teilmenge davon.

5.6. **Exponentialgesetz.** Mit Lokalkompaktheit kann man neben der Topologien der punktweisen Konvergenz eine weitere Topologie auf der Menge der stetigen Funktionen definieren, die feiner ist und sich gut verhält, wenn man 'Einsetzen von Punkten' als stetige Abbildung haben möchte.

Definition 5.53. Seien X, Y topologische Räume, X lokalkompakt und $C(X,Y)$ die Menge der stetigen Abbildungen $f: X \to Y$. Auf $C(X,Y)$ definieren wir eine Topologie durch die Subbasis von Mengen der Form

$$S_{K,U} = \{f \in C(X,Y) \mid K \subseteq X \text{ kompakt, }, U \subseteq Y \text{ offen und } K \subseteq f^{-1}(U)\}.$$

Diese Topologie heißt die **kompakt-offene Topologie** $\mathcal{O}_{ko}$ auf $C(X,Y)$.

Man kann diese Topologie auch definieren, wenn X nicht lokalkompakt ist, dann ist sie aber nicht von besonderem Interesse.

Bemerkung 5.54. Wenn Y ein metrischer Raum ist, dann konvergiert eine Funktionenfolge $(f_n) \subseteq C(X,Y)$ genau dann in der kompakt-offenen Topologie, wenn alle Einschränkungen auf kompakte Teilmengen von X gleichmäßig konvergieren. (Übung)

Auf der Ebene der Abbildungen kann man für beliebige Mengen X, Y, Z die Mengen $\mathrm{Abb}(X \times Y, Z)$ und $\mathrm{Abb}(X, \mathrm{Abb}(Y,Z))$ miteinander identifizieren durch eine Abbildung

$$\tilde{\alpha}: \mathrm{Abb}(X \times Y, Z) \to \mathrm{Abb}(X, \mathrm{Abb}(Y,Z)) \quad \text{mit} \quad \tilde{\alpha}(F)(x) = F(x,\cdot).$$

Diese Identifizierung läuft auch unter dem Namen **Exponentialgesetz**, da man manchmal die Notation $\mathrm{Abb}(X,Y) = Y^X$ verwendet und damit dann $Z^{X\times Y} = (Z^Y)^X$ hat.

Der folgende Satz zeigt, warum Lokalkompaktheit und die kompakt-offene Topologie zusammenpassen.

Satz 5.55. (a) *Wenn man $\tilde{\alpha}$ auf stetige Abbildungen einschränkt und auf $C(Y,Z)$ die kompakt-offene Topologie verwendet, bekommt man eine injektive, stetige Abbildung*

$$\alpha: C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y,Z)).$$

(b) *Wenn X Hausdorff und Y lokalkompakt ist und alle Abbildungsräume die kompakt-offene Topologie tragen, dann ist α ein Homöomorphismus.*
(c) *Für lokalkompaktes X ist die kompakt-offene Topologie auf $C(X,Y)$ die gröbste Topologie, für die die Auswertungsabbildung*

$$\mathrm{ev}: C(X,Y) \times X \to Y \text{ mit } (x,f) \mapsto f(x)$$

stetig ist.

Die Bedingung in c) kann auch zur Definition der kompakt-offenen Topologie verwendet werden.

In b) braucht man für die Surjektivität nur die Lokalkompaktheit von Y, die Hausdorffeigenschaft von X wird erst für die Offenheit gebraucht.

Die kompakt-offene Topologie ist auf Abbildungsräumen zwischen lokalkompakten topologische Räumen also gerade die Topologie, mit der sich Einsetzen von Punkten in stetige Abbildungen so verhält, wie man sich das vorstellt.