1. Übungsblatt
Differentialgeometrie I
im WS 2017/18 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 26.10.17
10 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Sei $c \in \mathbb{R}$ und $M_k^n(c) = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+k}) \in \mathbb{R}^{n+k} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=n+1}^{n+k} x_i^2 = c \right\}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $c \neq 0$ ist $M_k^n(c)$ eine Mannigfaltigkeit. Was ist die Dimension von $M_k^n(c)$?

(b) $M_k^n(0)$ ist keine Mannigfaltigkeit, falls $n, k \geq 1$.

Aufgabe 2

Sei $\mathbb{R}P^n = \{[v] \mid v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\}$, wobei $v \sim w \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $v = \lambda \cdot w$. Zeigen Sie: $\mathbb{R}P^n$ ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Hilfe folgender Karten:

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n,\ [(x_1, \dots, x_{n+1})] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}),$$

$$U_i = \left\{ [(x_1, \dots, x_{n+1})] \;\middle|\; x_i \neq 0 \right\} \subset \mathbb{R}P^n.$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen wohldefiniert und glatt sind:

(a) $\mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$ mit $t \mapsto e^{2\pi i t}$

(b) $S^1 \subset \mathbb{C} \to S^1 \subset \mathbb{C}$ mit $z \mapsto z^n$.

Aufgabe 4

Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Zeigen Sie:

(a) X ist zusammenhängend $\Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subset Y$ ist zusammenhängend.

(b) X ist kompakt und Y Hausdorff $\Rightarrow f(X) \subset Y$ ist kompakt.

(c) Folgern Sie, dass S^n und $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph sind.

Bitte wenden für Präsenzaufgaben für die Tutorate am 23.10.

Präsenzaufgaben

Differentialgeometrie I

im WS 2017/2018 bei Prof. Dr. S. Goette

keine Abgabe, Besprechung 23.10.17

Aufgabe 1

Wiederholen Sie die Aussagen des Satzes über implizite Funktionen und des Satzes über lokale Umkehrfunktion aus der Analysis.

Sind die Rangbedingungen jeweils notwendig? Überlegen Sie sich, ob es Beispiele gibt, bei denen die Ableitung nicht invertierbar ist, es aber trotzdem eine (lokale) Umkehrfunktion gibt.

Aufgabe 2

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^3 - 3ax - y^2$. Finden Sie alle Werte $b \in \mathbb{R}$, so dass $f^{-1}(b)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Skizzieren Sie $f^{-1}(b)$ für einige Werte von a und b, so dass alle verschiedenen Typen der Mengen abgebildet werden.

Aufgabe 3

Zeigen Sie: $\mathbb{RP}^n$ (vgl. Definition in Aufgabe 2 der Hausaufgaben) ist Hausdorffraum mit abzählbarer Basis.

Bitte wenden für die Hausaufgaben.