10. Übungsblatt
Differentialgeometrie I
im WS 2017/18 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 11.1.18
10 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Auf diesem Blatt finden Sie einige Bonusaufgaben, d.h. um die 50% der Punkte zu erreichen, benötigen Sie nur 8 Punkte. Sie können aber bis zu 32 Punkte bekommen, wenn Sie alle Aufgaben lösen.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils den Schnittort und skizzieren Sie diesen:

(a) Für $M = S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ mit der von $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik.

(b) Für den flachen Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, wobei die Metrik auf dem flachen Torus mit Hilfe einer Riemannschen Überlagerung von der Metrik auf $\mathbb{R}^2$ induziert wird.

Aufgabe 2

Betrachten Sie allgemeine flache Tori $\mathbb{R}^2/\Gamma$, wobei Γ ein Gitter ist mit

$$\Gamma = \left\{ mv_1 + nv_2 \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \text{mit } v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \text{ linear unabhängig.}$$

(a) Definieren Sie die Vektoren $v, w \in \Gamma$ so, dass v der Vektor mit der kleinsten Norm in $\Gamma \setminus \{0\}$ ist und w die kürzeste Norm unter allen zu v linear unabhängigen Vektoren hat. Zeigen Sie, dass v und w das Gitter Γ erzeugen.

(b) Bestimmen Sie den Schnittort für den Fall $v_1 = v = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = w = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ mit $a^2 \leq b^2 + c^2$ und $b \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$. Fertigen Sie auch eine Skizze an.

Aufgabe 3

Es seien M und N Riemannsche Mannigfaltigkeiten, $p \in M$ und $q \in N$. Diese sollen die Schnittorte $C^M(p)$ und $C^N(q)$ besitzen, sowie die tangentialen konjugierten Orte K_p^M und K_q^N. Zeigen Sie, dass auf $M \times N$ gilt:

(a) $C^{M\times N}((p,q)) = \big(M \times C^N(q)\big) \cup \big(C^M(p) \times N\big)$

(b) $K_{(p,q)}^{M\times N} = \big(T_pM \times K_q^N\big) \cup \big(K_p^M \times T_qN\big)$

Aufgabe 4

Es sei $\mathbb{C}P^n$ der komplexe projektive Raum der Dimension n. Wie in Aufgabe 1 von Blatt 5 sei $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i w_i$ das Hermitesche Standardprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Die dort definierte Metrik hat in der Karte $\varphi_0\colon [z_0, \ldots, z_n] \mapsto \left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}\right)$ die Gestalt

$$g_z^{\varphi_k}(v, w) = \operatorname{Re} \frac{(1 + |z|^2)\langle v, w\rangle - \langle v, z\rangle\langle z, w\rangle}{(1 + |z|^2)^2}$$

für $z, v, w \in \mathbb{C}^n$.

Bestimmen Sie den Levi-Civita-Zusammenhang, den Riemannschen Krümmungstensor und die Schnittkrümmungen der Metrik im Punkt $[1, 0, \ldots, 0]$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie den Schnittort von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Zeigen Sie dazu zuerst, dass jede Geodätische in einem $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ liegt und benutzen Sie Aufgabe 2 von Blatt 9.

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die Jacobifelder auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Aus Symmetriegründen genügt es, diese entlang der Geodätischen $\gamma(t) = [1\colon e^{it}\colon 0 \ldots \colon 0]$ zu betrachten.

(a) Geben Sie eine explizite Formel für Jacobifelder an, die zu

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^1 = \{[x\colon y\colon 0\colon \ \ldots \colon 0] \mid x, y \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$$

tangential sind. Das heißt, Sie dürfen für diesen Fall wegen Aufgabe 2 von Blatt 9 nur diesen $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ und $n = 1$ betrachten.

(b) Geben Sie eine geodätische Variation von γ an, die nicht in einem $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ enthalten ist und bestimmen Sie das zugehörige Jacobifeld.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass die Gruppe $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ für $l_1, \ldots, l_n$ auf S^{2n-1} durch

$$r \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (z_1 \cdot e^{2\pi i r l_1/k}, \ldots, z_n \cdot e^{2\pi i r l_n/k})$$

mit $(z_1, \ldots, z_n) \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ frei und eigentlich diskontinuierlich operiert. Der Quotient S^{2n-1}/G heißt der Linsenraum $L(k; l_1, \ldots, l_n)$.

Aufgabe 8

Fassen Sie die hyperbolische Ebene als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf. Zeigen Sie, dass die Möbiustransformationen $F_A(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$, d.h., $|a|^2 = |b|^2 + 1$ Isometrien der hyperbolischen Ebene sind.

Hinweis: Rechnen Sie komplex und benutzen Sie, dass $g_z(u, v) = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} \operatorname{Re}(\bar{u}v)$ ist.