11. Übungsblatt
Differentialgeometrie I
im WS 2017/18 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 18.1.18 10 Uhr (also vor der Vorlesung) in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Es sei $\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$ das n-dimensionale Volumen der Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

(a) Sei $\kappa \in \mathbb{R}$ und $r > 0$. Berechnen Sie mit Aufgabe 1 von Blatt 7 das $(n-1)$-dimensionale Volumen $\operatorname{vol}^{n-1}\big(\partial B_r(p)\big)$ der Menge $\partial B_r(p) \subset M^n_\kappa$ für ein $p \in M^n_\kappa$.

(b) Berechnen Sie das n-dimensionale Volumen $\operatorname{vol}^n\big(B_r(p)\big)$ in M^n_κ mit Hilfe der Formel

$$\operatorname{vol}^n\big(B_r(p)\big) = \int_0^r \operatorname{vol}^{n-1}\big(\partial B_s(p)\big)\,ds.$$

Aufgabe 2

Unter den Voraussetzungen des Satzes von Rauch gelte $\|V(t_0)\| = \|\bar V(t_0)\|$ für ein $t_0 \in (0, L]$. Beweisen Sie

(a) $\|V(t)\| = \|\bar V(t)\|$ für alle $t \in [0, t_0]$;

(b) $K(\operatorname{span}\{\dot c(t), V(t)\}) = K(\operatorname{span}\{\dot{\bar c}(t), \bar V(t)\})$ für alle $t \in [0, t_0]$;

(c) $\frac{V}{\|V\|}$ und $\frac{\bar V}{\|\bar V\|}$ sind parallele Vektorfelder entlang c bzw. $\bar c$.

Aufgabe 3

Es sei $h : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(v, w) = \sum_{i=1}^n v_i w_i - v_{n+1} w_{n+1}.$$

Zeigen Sie:

(a) Auf der Untermannigfaltigkeit

$$\mathcal{H} = \big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0,\ x^2_{n+1} = 1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2\big\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

definiert h durch Einschränkung eine Riemannsche Metrik g.

(b) Es sei $p : \mathcal{H} \to D^n = B_1^{\mathbb{R}^n}(0) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gegeben durch Zentralprojektion am Punkt $-e_{n+1}$, dann ist $p : (\mathcal{H}, g) \to \big(B_1(0), g^{\mathrm{hyp}}\big)$ eine Isometrie.

Bitte wenden

Aufgabe 4

Zeigen Sie den Seitenkosinussatz

$$c_\kappa(c) = c_\kappa(a)c_\kappa(b) + \kappa s_\kappa(a)s_\kappa(b)\cos\gamma$$

in M^n_κ für $\kappa > 0$ mit $c_\kappa(x) = \cos(\sqrt{\kappa}x)$ und $s_\kappa(x) = \frac{\sin(\sqrt{\kappa}x)}{\sqrt{\kappa}}$.
Betrachten Sie dazu ein geodätisches Dreieck $\Delta(A, B, C)$ mit den Seitenlängen a, b und c und dem Winkel γ am Punkt C.

(a) Betrachten Sie zunächst den Fall $\kappa = 1$ und wählen Sie Koordinaten, so dass das Dreieck die Ecken $C = e_1, B = \cos a\ e_1 + \sin a\ e_2$ und $A = \cos b\ e_1 + \sin b \cos\gamma\ e_2 + \sin b \sin\gamma\ e_3$ hat.

(b) Überlegen Sie sich für allgemeines $\kappa > 0$, wie sich Längen und Winkel verändern.

(c) Für festes a, b und γ sei c_κ die Lösung der obigen Gleichung. Leiten Sie die obige Gleichung bei 0 von rechts nach κ ab. Welche Identität erhalten Sie?

Bemerkung: Der Seitenkosinussatz wie oben gilt auch für $\kappa < 0$ mit $c_\kappa(x) = \cosh(\sqrt{-\kappa}x)$ und $s_\kappa(x) = \frac{\sinh(\sqrt{-\kappa}x)}{\sqrt{-\kappa}}$.