3. Übungsblatt
Differentialgeometrie I
im WS 2017/18 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 9.11.17
10 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

(a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Untermannigfaltigkeit und X ein Vektorfeld auf M. Zeigen Sie, dass es für jede Untermannigfaltigkeitskarte $\varphi\colon U \to V$ eine Fortsetzung von X auf U gibt.

(b) Benutzen Sie die eine Partition der Eins, um in der Situation aus a) für kompakte M das Vektorfeld X auf $\mathbb{R}^n$ fortzusetzen.

(c) Geht das auch für Mannigfaltigkeiten, d.h., kann man für eine kompakte Untermannigfaltigkeit $M \subset N$ ein Vektorfeld auf M zu einem Vektorfeld auf N fortsetzen?

Aufgabe 2

Sei $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = \{[v] \mid v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\}$, wobei $v \sim w \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $v = \lambda \cdot w$.

(a) Wir definieren auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ eine Topologie durch

$$U \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \text{ offen } \Leftrightarrow \{v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \mid [v] \in U\} \subset \mathbb{C}^{n+1} \text{ offen},$$

d.h., die Quotiententopologie der Projektion $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mit $v \mapsto [v]$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mit dieser Topologie Hausdorff ist und eine abzählbare Basis besitzt.

(b) Finden Sie $n+1$ Karten analog zu denen für $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ aus Aufgabe 2 von Blatt 1.

(c) Zeigen Sie, dass die Karten aus b) einen C^∞-Atlas von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ bilden.

Aufgabe 3

Betrachten Sie $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ als Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0. Zu $A \in M_n(\mathbb{R})$ definiere das Vektorfeld $V_A \in \mathfrak{X}(G)$ durch

$$V_A(g) = (g, g \cdot A) \in TG \cong G \times M_n(\mathbb{R}),$$

wobei „$\cdot$“ Matrizenmultiplikation bezeichne.

(a) Für $h \in G$ definiere $\ell_h : G \to G$ durch $\ell_h(g) = hg$. Zeigen Sie, dass V_A für jedes A zu sich selbst ℓ_h-verwandt ist für alle $h \in G$.

(b) Zeigen Sie $[V_A, V_B] = V_{[A,B]}$ für alle $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Aufgabe 4

Es sei $\varphi(g) = g^T g$ eine Abbildung der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen in die symmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass

(a) φ eine Submersion ist, also $d_x\varphi$ an jeder Stelle surjektiv ist.

(b) $\mathrm{SO}(n)$ eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M_n ist. (*Hinweis:* Benutzen Sie den Satz vom regulären Wert.)

(c) der Tangentialraum $T_g\mathrm{SO}(n) = \{A \in M_n \mid g^T A + A^T g = 0\}$ ist.