5. Übungsblatt
Differentialgeometrie I
im WS 2017/18 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 23.11.17
10 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Wir definieren auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ für $Z \in \mathbb{C}^{n+1}$ und Vektoren $V, W \in T_Z(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$ die Abbildung

$$g_Z(V,W) := \frac{\operatorname{Re} < \tilde{V}, \tilde{W} >}{\|Z\|^2},$$

wobei $< \cdot, \cdot >$ das komplexe Standardskalarprodukt ist und $\tilde{V}, \tilde{W}$ die Projektionen von V bzw. W auf den Unterraum, der zu Z und iZ orthogonal ist.

(a) Zeigen Sie, dass dies eine Riemannsche Metrik $g^{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$ auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ induziert.

(b) Bestimmen Sie die Matrix $g_Z^{\varphi_1}$ in der Karte φ_1 aus Aufgabe 2 von Blatt 3.

Aufgabe 2

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und für alle Ebenen $E \subset T_pM$ sei die Schnittkrümmung $K_p(E)$ bekannt. Bestimmen Sie den Krümmungstensor $g(R_{v,w}x, y)$ für alle $v, w, x, y \in T_pM$.
Hinweis: Bestimmen Sie $g(R_{e_i,e_j}e_k, e_l)$ für eine gegebene Orthonormalbasis $(e_i)_{i=1}^{\dim M}$ zunächst für den Fall $i = l, j = k$, dann für den Fall $j = k$ und dann allgemein.

Aufgabe 3

(a) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i=1}^{\dim M}$ eine von T_pM gibt, so dass der Riccitensor bezüglich der Basis (e_i) Diagonalgestalt besitzt, also $\operatorname{ric}(e_i, e_j) = \rho_i \delta_{ij}$.

(b) Bestimmen Sie für eine dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit die Koeffizienten $g(R_{e_i,e_j}e_k, e_l)$ des Riemannschen Krümmungstensors aus den Koeffizienten der Riccikrümmung $\operatorname{ric}(e_i, e_j)$ in der Basis aus a).

Aufgabe 4

Seien M, N zwei glatte Mannigfaltigkeiten mit Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Zeigen Sie:

(a) Das kartesische Produkt $M \times N$ trägt eine Topologie, so dass $\left\{ \varphi \times \psi \colon U^\varphi \times U^\psi \to V^\varphi \times V^\psi \;\middle|\; \varphi \in \mathcal{A}, \psi \in \mathcal{B} \right\}$ einen Atlas bildet.

(b) $T(M \times N)$ und $TM \times TN$ in natürlicher Weise diffeomorph.