

# 1. ÜBUNGSBLATT

## DIFFERENTIALGEOMETRIE II - SPEZIELLE HOLONOMIE

IM WS 2018/19 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe Donnerstag, den 25.10.18  
zu Beginn der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre  
Abgabe

### Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass der komplex projektive Raum mit der Fubini-Study-Metrik aus Aufgabe 1 von Blatt 5 im WS 2017/18 ein symmetrischer Raum ist. Sei dazu  $\pi: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  die Projektion und

$$g(d_Z\pi X, d_Z\pi Y) = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|Z\|^2} - \frac{\langle X, Z \rangle \langle Z, Y \rangle}{\|Z\|^4}.$$

### Aufgabe 2

Zeigen Sie:

- (a) Die Exponentialabbildung auf  $GL(n, \mathbb{k})$  wird durch die Exponentialreihe aus Bemerkung 3.11 gegeben.
- (b) Sei  $H \subset G$  eine Unter-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ . Dann gilt  $\exp_G(X) = \exp_H(X)$  für alle  $X \in \mathfrak{h}$ .

Also beschreibt die Exponentialreihe für alle Matrixgruppen die Exponentialabbildung

- (c) Aus  $[X, Y] = 0$  folgt  $\exp(X) \cdot \exp(Y) = \exp(A + B)$ .

### Aufgabe 3

Berechnen Sie  $\exp(tX)$  für die folgenden  $2 \times 2$ -Matrizen.

(a)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

### Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass  $U(n)$  eine Lie-Gruppe ist.