10. Übungsblatt

Differentialgeometrie II - Spezielle Holonomie

Abgabe Donnerstag, den 10.1.19 (zu Beginn der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Es sei G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Unter-Lie-Algebra, aufgefasst als Menge linksinvarianter Vektorfelder. Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{h}$ definiert ein involutives Untervektorbündel von TG vom Rang $\dim H$.

(b) Das Blatt L der zugehörigen Blätterung von G durch das neutrale Element e trägt eine Gruppenstruktur, so dass die Immersion $L \to G$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(c) Es gilt $\exp^L = \exp^G|_{\mathfrak{h}}$.

Aufgabe 2

Es seien M, N vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $F\colon M \to N$ eine Riemannsche Submersion mit total geodätischen Fasern, d.h., es gilt $\nabla_X Y \in \Gamma(\ker dF)$ für alle $X, Y \in \Gamma(\ker dF)$. Zeigen Sie:

(a) Zu jedem Vektorfeld $U \in \mathfrak{X}(N)$ existiert ein F-verwandtes Vektorfeld $\bar{U} \in \mathfrak{X}(M)$ mit $\bar{U} \perp \ker dF$.

(b) Seien $U, \bar{U}$ wir oben mit den Flüssen $\Phi_U, \Phi_{\bar{U}}$, dann ist $\Phi^t_{\bar{U}}(p)$ für einen Punkt $p \in M$ und ein $t \in \mathbb{R}$ genau dann definiert, wenn $\Phi^t_U(F(p))$ definiert ist.

(c) $\Phi^t_{\bar{U}}$ bildet $F^{-1}(p)$ isometrisch auf $F^{-1}(\Phi^t_U(p))$ ab.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Hopf-Faserungen $S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ und $S^{4n+3} \to \mathbb{HP}^n$ totalgeodätisch in Sinne von Aufgabe 2 sind.

Aufgabe 4

Die Oktaven $\mathbb{O}$ entstehen aus den Quaternionen durch die Caley-Dickson-Konstruktion aus Aufgabe 4 von Blatt 9. Auf $\mathbb{O}$ wird ein Skalarprodukt definiert durch $\langle a, b\rangle = \operatorname{Re}(\bar{a} \cdot b)$. Die Elemente der Form $(a, b) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ mit a imaginär heißen imaginäre Oktaven. Zeigen Sie:

(a) Je zwei $\mathbb{R}$-linear unabhängige imaginäre Oktaven spannen eine Unteralgebra U auf, die zu den Quaternionen $\mathbb{H}$ isomorph ist.

(b) Das orthogonale Komplement $U^\perp$ ist ein U-Linksmodul, wobei $a \in U$ ein Element $x \in U^\perp$ auf $\bar{a}x = xa$ abbildet.

(c) Das Produkt zweier Elemente x, $xa \in U^\perp$ mit $a \in U$ wird durch $x(xa) = -\|x\|^2 a$ gegeben.

Homework 10, due on Thursday 10.1.19 (beginning of lecture)

Problem 1

Let G be a Lie group and $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ a Sub-Lie algebra, seen as set of left-invariant vector fields. Prove the following:

(a) $\mathfrak{h}$ defines an involutive subbundle of TG of rank $\dim H$.

(b) The leaf L of the corresponding foliation of G through the neutral element e carries a group structure, such that the immersion $L \to G$ is a group homomorphism.

(c) It is $\exp^L = \exp^G|_{\mathfrak{h}}$.

Problem 2

Let M, N be complete Riemannian manifolds and $F\colon M \to N$ a Riemannian submersion with totally geodesic fibers, i.e., such that $\nabla_X Y \in \Gamma(\ker dF)$ for all $X, Y \in \Gamma(\ker dF)$. Prove the following:

(a) For each vector field $U \in \mathfrak{X}(N)$ there exists an F-related vector field $\bar{U} \in \mathfrak{X}(M)$ with $\bar{U} \perp \ker dF$.

(b) Let $U, \bar{U}$ be as above with flows $\Phi_U, \Phi_{\bar{U}}$. Then $\Phi^t_{\bar{U}}(p)$ for a point $p \in M$ and $t \in \mathbb{R}$ is defined if and only if $\Phi^t_U(F(p))$ is defined.

(c) $\Phi^t_{\bar{U}}$ maps $F^{-1}(p)$ isometrically onto $F^{-1}(\Phi^t_U(p))$.

Problem 3

Show that the Hopf fibations $S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ and $S^{4n+3} \to \mathbb{HP}^n$ are totally geodesic in the sense of Problem 2.

Problem 4

The octanians $\mathbb{O}$ arise from the quaternions $\mathbb{H}$ via the Caley-Dickson construktion from Problem 4, HW9. We define an inner product on $\mathbb{O}$ by $\langle a, b\rangle = \mathrm{Re}(\bar{a} \cdot b)$. Elements of the form $(a, b) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ with $a \in \mathbb{H}$ imaginary are called imanigary octonians. Prove the following:

(a) Any two $\mathbb{R}$-linearly independent imaginary octonians generate a subalgebra U, which is isomorphic to the quaternions $\mathbb{H}$.

(b) The orthogonal complement $U^\perp$ is a U-left-module, where $a \in U$ maps an element $x \in U^\perp$ to $\bar{a}x = xa$.

(c) The product of two elements x, $xa \in U^\perp$ with $a \in U$ is given by $x(xa) = \|x\|^2 a$.