11. Übungsblatt

Differentialgeometrie II - Spezielle Holonomie

Abgabe Donnerstag, den 17.1.19 (zu Beginn der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Zeigen Sie die linke Spalte aus Beispiel 5.27, d.h., bestimmen Sie die folgenden Clifford-Algebren:

(a) $C\ell_0 = \mathbb{R}$

(b) $C\ell_1 = \mathbb{C}$

(c) $C\ell_2 = \mathbb{H}$

(d) $C\ell_3 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: für alle n gibt es einen Algebren-Isomorphismus $C\ell_n \cong C\ell_{n+1}^{\mathrm{ev}}$, der erzeugt wird von $v \mapsto v \cdot e_{n+1}$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Oktonionen (auch: Oktaven) aus Aufgabe 4 von Blatt 10.

(a) Berechnen Sie $v \cdot (\cos\varphi v + \sin\varphi w)$ für zwei imaginäre Einheitsoktonionen v, w mit $v \perp w$ und folgern Sie, dass $\mathrm{Spin}(7)$ transitiv auf der Einheitssphäre $S^7 \subset \mathbb{O}$ wirkt.

(b) Seien x, y zwei imaginäre Einheitsoktionen. Finden Sie zwei geeignete Elemente g, $h \in \mathrm{Spin}(7)$ wie in (a), so dass $gh \in G_2$, und so dass $(gh)(x) = y$.

Aufgabe 4

Wir versehen $V = \mathbb{R}^{2n}$ mit dem Standard-Skalarprodukt und der fast komplexen Struktur J mit $J(e_{2i-1}) = e_{2i}$, und definieren $\Lambda^{0,\bullet}V^{*\prime\prime}$ wie in Abschnitt 4.2.

(a) Zeigen Sie, dass $\Lambda^{0,\bullet}V^{*\prime\prime}$ ein Modul der komplexen Clifford-Algebra $\mathbb{C}\ell_{2n}$ ist, wobei $v = v' + v'' \in V \otimes \mathbb{C}$ mit $v' \in V'$ und $v'' \in V''$ durch

$$c(v)\alpha = \sqrt{2}\,(\langle -, v' \rangle \wedge \alpha - \iota_{v''}\alpha)$$

wirkt; hierbei sei $\langle -, - \rangle$ das komplex bilineare Produkt auf $V \otimes \mathbb{C}$.

(b) Bestimmen Sie die Wirkung von $\omega_{\mathbb{C}}$.

Homework 11, due on Thursday 17.1.19 (beginning of lecture)

Problem 1

Prove the left column of Example 5.27, i.e., find the following Clifford algebras:

(a) $C\ell_0 = \mathbb{R}$

(b) $C\ell_1 = \mathbb{C}$

(c) $C\ell_2 = \mathbb{H}$

(d) $C\ell_3 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.

Problem 2

Prove that for all $n \in \mathbb{N}$, there is an algebra homomorphism $C\ell_n \cong C\ell^{\mathrm{ev}}_{n+1}$ generated by $v \mapsto v \cdot e_{n+1}$ for all $v \in \mathbb{R}^n$

Problem 3

Consider the octonians from Homework 10 (problem 4):

(a) Compute $v \cdot (\cos\varphi v + \sin\varphi w)$ for two imaginary octonians v, w with $v \perp w$ and conclude that $\mathrm{Spin}(7)$ acts transitively on the unit sphere $S^7 \subset \mathbb{O}$.

(b) Let x, y be two imaginary unit octonians. Find two elements g, $h \in \mathrm{Spin}(7)$ as in (a), such that $gh \in G_2$ and $(gh)(x) = y$.

Problem 4

We equip $V = \mathbb{R}^{2n}$ with the standard inner product and the almost complex structure J given by $J(e_{2i-1}) = e_{2i}$. Then define $\Lambda^{0,\bullet}V^{*\prime\prime}$ as in Section 4.2.

(a) Prove that $\Lambda^{0,\bullet}V^{*\prime\prime}$ is a module of the complex Clifford algebra $\mathbb{C}\ell_{2n}$, where $v = v' + v'' \in V \otimes \mathbb{C}$ with $v' \in V'$ and $v'' \in V''$ acts via

$$c(v)\alpha = \sqrt{2}\,(\langle -, v' \rangle \wedge \alpha - \iota_{v''}\alpha).$$

Here, $\langle -, - \rangle$ is the complex bilinear product on $V \otimes \mathbb{C}$.

(b) Find the action of $\omega_{\mathbb{C}}$.