13. Übungsblatt

Differentialgeometrie II - Spezielle Holonomie

Abgabe Donnerstag, den 31.1.19

Aufgabe 1

Sei (V, R, H) ein Holonomiesystem. Definieren Sie auf dem Raum der Krümmungstensoren $\mathcal{R}(V)$ ein Skalarprodukt, so dass so dass H durch Isometrien wirkt.

Aufgabe 2

Es sei $M = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ wie in Aufgabe 4 von Blatt 12. Außerdem sei $F \subset \mathfrak{p}$ der Raum der spurfreien imaginären Diagonalmatrizen.

(a) Bestimmen Sie Untergruppen

$$N = \{h \in H \mid \mathrm{Ad}_h(F) = F\} \quad \text{und} \quad Z = \{h \in N \mid \mathrm{Ad}_h|_F = \mathrm{id}_F\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass N/Z zur symmetrischen Gruppe in n Elementen isomorph ist und beschreiben Sie die Wirkung auf F.

Aufgabe 3

Es sei $\pi\colon P \to M$ ein H-Prinzipalbündel (vgl. Def 3.27), V ein $\mathbb{k}$-Vektorraum für $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\gamma\colon H \to \mathrm{Aut}(V)$ eine Darstellung von H. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$P \times_H V = \{[p, v] \mid p \in P, v \in V\} \to M$$

mit $[p, v] \mapsto \pi(p)$ für $[p, v] = \{(ph^{-1}, \gamma_h(v)) \mid h \in H\} \subset P \times V$ ein $\mathbb{k}$-Vektorbündel über M definiert.

Aufgabe 4

Es sei $P \times_H V \to M$ ein $\mathbb{k}$-Vektorbündel über M wie in Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\Gamma(P \times_H V) \cong \{\hat{s}\colon P \to V \mid \hat{s}(ph^{-1}) = \gamma_h \hat{s}(p)\},$$

so dass einer H-äquivarianten Abbildung $\hat{s}\colon P \to V$ ein Schnitt $s \in \Gamma(P \times_H V)$ entspricht mit $s(\pi(p)) = [p, \hat{s}(p)]$.

(b) Sei $M = G/H$ ein symmetrischer Raum und $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Überprüfen Sie, dass $TM = G \times_H \mathfrak{p}$ gilt und dass a) gerade die Beschreibung von $\mathfrak{X}(M)$ aus Abschnitt 3.4 liefert.

Homework 13, due on Thursday 31.1.19 (beginning of lecture)

Problem 1

Let (V, R, H) be a holonomy system. Define an inner product on the space $\mathcal{R}(V)$ of curvature tensors such that H acts by isometries.

Problem 2

Let $M = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ be as in HW12, problem 4 and let $F \subset \mathfrak{p}$ be the space of trace-free diagonal matrices.

(a) Find subgroups

$$N = \{h \in H \mid \mathrm{Ad}_h(F) = F\} \quad \text{and} \quad Z = \{h \in N \mid \mathrm{Ad}_h|_F = \mathrm{id}_F\}.$$

(b) Prove that N/Z is isomorphic to the symmetric group in n elements and describe the action on F.

Problem 3

Let $\pi \colon P \to M$ be an H principle bundle (see. Def 3.27), V a $\mathbb{k}$ vektor space for $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ and let $\gamma \colon H \to \mathrm{Aut}(V)$ be a representation of H. Show that the map

$$P \times_H V = \{[p, v] \mid p \in P, v \in V\} \to M$$

with $[p, v] \mapsto \pi(p)$ for $[p, v] = \{(ph^{-1}, \gamma_h(v)) \mid h \in H\} \subset P \times V$ defines a $\mathbb{k}$ vektor bundle over M.

Problem 4

Let $P \times_H V \to M$ be a $\mathbb{k}$ vektor bundle over M as in Problem 3.

(a) Prove that

$$\Gamma(P \times_H V) \cong \{\hat{s} \colon P \to V \mid \hat{s}(ph^{-1}) = \gamma_h \hat{s}(p)\}$$

to find that an H-equivariant map $\hat{s} \colon P \to V$ corresponds to a section $s \in \Gamma(P \times_H V)$ with $s(\pi(p)) = [p, \hat{s}(p)]$.

(b) Let $M = G/H$ be a symmetric space and $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Check that $TM = G \times_H \mathfrak{p}$ holds and prove that a) gives the description of $\mathfrak{X}(M)$ from Section 3.4.