2. Übungsblatt

Differentialgeometrie II - Spezielle Holonomie

im WS 2018/19 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Mittwoch, den 31.10.18, 18 Uhr im Postfach Doris Hein (3. Etage))

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass die rechts-invarianten Vektorfelder auf einer Lie-Gruppe G eine Lie-Algebra bilden, die via $Y \mapsto -Y(e) \in T_eG \cong \mathfrak{g}$ isomorph zu $\mathfrak{g}$ ist.

(b) Gegeben sei eine Gruppenwirkung $F\colon G \times M \to M$. Zeigen Sie, dass diese einen Lie-Algebra-Homomorphismus $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ induziert durch $f(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0} F(\exp(-tX), \cdot)$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g):

(a) Sei $F\colon M \to M$ eine Isometrie. Dann ist $M^F = \{p \in M \mid F(p) = p\}$ eine total geodätische Untermannigfaltigkeit von M.

(b) Sei $H \subset G$ eine Untergruppe der Isometriegruppe G von M. Dann ist

$$M^H := \{p \in M \mid h(p) = p \text{ für alle } h \in H\}$$

eine total geodätische Untermannigfaltigkeit von M.

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{C}^{n,1}$ der Raum $\mathbb{C}^{n+1}$ mit der quadratischen Form

$$\langle v, w \rangle := \overline{v_1} w_1 + \ldots + \overline{v_n} w_n - \overline{v_{n+1}} w_{n+1}.$$

Wir definieren den komplex hyperbolischen Raum $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ als die Projektifizierung von

$$V_- := \{v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle v, v \rangle < 0\},$$

also das Bild von V_- unter der Projektion $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{CP}^n$. Für $z \in \mathbb{C}^{n,1}$ und $v, w \in T_z\mathbb{C}^{n,1} = \mathbb{C}^{n,1}$ definieren wir

$$g_z(v, w) = -\frac{\langle v, w \rangle}{\langle z, z \rangle} + \frac{\langle v, z \rangle \langle z, w \rangle}{\langle z, z \rangle^2}.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ induziert.

Aufgabe 4

Es sei $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ wie in Aufgabe 3 und

$$U(n,1) = \{A \in M_{n+1}(\mathbb{C}) \mid \langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle \text{ für alle v,w } \in \mathbb{C}^{n,1}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Zeigen Sie, dass $U(n,1)$ auf $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ durch Isometrien wirkt.

(b) Finden Sie zu $z \in V_-$ die Punktspiegelung $I_{[z]} \in U(n,1)$.

(c) Bestimmen Sie die Isotropiegruppe H.

(d) * Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ ist der zu $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ duale symmetrische Raum.

2. HOMEWORK - DIFFERENTIALGEOMETRIE II - SPEZIELLE HOLONOMIE

Hand in by Wednesday, October 31, 6pm (Thursday, November 1 is a holiday) in Doris' mailbox (or in person)

Problem 1

(a) Show that the right invariant vector fields on a Lie group G form a Lie algebra which is isomorphic to $\mathfrak{g}$ via $Y \mapsto -Y(e) \in T_eG \cong \mathfrak{g}$.

(b) Let $F\colon G\times M \to M$ be a group action. Show that this induces a Lie group homomorphism $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ via $f(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0}F(\exp(-tX), \cdot)$.

Problem 2

Show for a Riemannian manifold (M, g):

(a) Let $F\colon M \to M$ be an isometry. Then $M^F = \{p \in M \mid F(p) = p\}$ is a totally geodesic submanifold of M.

(b) Let $H \subset G$ be a subgroup of the isometry group G of M. Then

$$M^H := \{p \in M \mid h(p) = p \text{ for all } h \in H\}$$

is a totally geodesic submanifold of M.

Problem 3

Let $\mathbb{C}^{n,1}$ be $\mathbb{C}^{n+1}$ with the quadratic form

$$\langle v, w\rangle := v_1\overline{w_1} + \ldots + v_n\overline{w_n} - v_{n+1}\overline{w_{n+1}}.$$

Define the complex hyperbolic space $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ as the projectivation of $V_- := \{v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle v, v\rangle < 0\}$, i.e., the image of V_- under the projektion $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{CP}^n$. For $z \in \mathbb{C}^{n,1}$ and $v, w \in T_z\mathbb{C}^{n,1} = \mathbb{C}^{n,1}$ define now

$$g_z(v, w) = -\frac{\langle v, w\rangle}{\langle z, z\rangle} + \frac{\langle v, z\rangle \langle z, w\rangle}{\langle z, z\rangle^2}.$$

Show that this induces a Riemannian metric on $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$.

Problem 4

Let $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ be as in Problem 3 and

$$U(n, 1) = \{A \in M_{n+1}(\mathbb{C}) \mid \langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle \text{ für alle v,w } \in \mathbb{C}^{n,1}\}.$$

(a) Show that $U(n, 1)$ acts by isometries on $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$.

(b) Find the point reflection $I_{[z]} \in U(n, 1)$ for $z \in V_-$.

(c) Find the isotropy group H.

(d) * Show that $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ is the symmetric space dual to $\mathbb{CP}^n$.