3. Übungsblatt

Differentialgeometrie II - Spezielle Holonomie

im WS 2018/19 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 8.11.18 (zu Beginn der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Zeigen Sie **für eine der untenstehenden Mengen**, dass sie auf natürliche Weise ein symmetrischer Raum ist, indem Sie Lie-Gruppen $H \subset G$ und eine Cartan-Involution von G angeben, so dass $(G^I)_0 \subset H \subset G^I$ gilt und G/H isomorph zu M ist.

(a) $M = \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid g^* = g, g > 0\}$, wobei $g > 0$ bedeutet, dass alle Eigenwerte positiv sind.

(b) $M = \{V \subset \mathbb{C}^n \mid V \text{ reeller Unterraum }, \dim_{\mathbb{R}} V = n, V \perp iV\}$, wobei $V \perp iV$ bedeutet, dass $\operatorname{Re}\langle v, iw\rangle = 0$ für alle $v, w \in V$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie für den Raum aus Aufgabe 1 bezüglich einer geeigneten symmetrischen Metrik den Riemannschen Krümmungstensor, die Ricci-Krümmung und die Schnittkrümmung.

Aufgabe 3

Beweisen Sie die Formel in Satz 3.19 (2) für den Levi-Civita-Zusammenhang eines symmetrischen Raumes.

Aufgabe 4

(a) Wir betrachten $\mathbb{CP}^n = \mathrm{U}(n+1)/(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1))$ mit $\pi(g) = [g \cdot e_{n+1}]$. Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{CP}^n$ eine Kurve mit $\gamma(0) = [e_{n+1}]$ und sei $\bar\gamma\colon [0,1] \to \mathrm{U}(n+1)$ ihr horizontaler Lift mit $\bar\gamma(0) = E_{n+1}$. Zeigen Sie, dass $\bar\gamma$ nur Werte in $\mathrm{SU}(n+1) \subset \mathrm{U}(n+1)$ annimmt.

(b) * Überlegen Sie sich dann, dass $SU(n+1)$ unter der Cartan-Involution I als Menge invariant ist und bestimmen Sie die Fixpunkt-Untergruppe $\mathrm{SU}(n+1)^I$.

(c) * Zeigen Sie schließlich, dass für die Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n+1) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ gilt, dass $\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]_{\mathfrak{g}}$ gilt und folgern Sie $\mathrm{Hol}_{[e_{n+1}]}(\mathbb{CP}^n, g^{FS}) = H$.

Aufgaben mit * sind freiwillige Ergänzungen.