4. Übungsblatt

Differentialgeometrie II - Spezielle Holonomie

im WS 2018/19 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 15.11.18 (zu Beginn der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Sei g eine Riemannsche Metrik und J eine fast komplexe Struktur. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) g ist mit J kompatibel.

(b) G ist J-invariant.

(c) Die Form $\omega = g(J\cdot, \cdot)$ ist alternierend.

(d) $h = g + i\omega$ ist ein Hermitesches Skalarprodukt.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die orientierte reelle Grassmann-Mannigfaltigkeit $\widetilde{Gr_2}(\mathbb{R}^{n+1})$ isomorph zur Quadrik

$$M = \{[z_0 \colon \ldots \colon z_n] \in \mathbb{CP}^n \mid z_0^2 + \ldots + z_n^2 = 0\}$$

ist.

Aufgabe 3

Sei (M, J) eine komplexe Mannigfaltigkeit und $E \to M$ ein holomorphes Vektorbündel vom Rang r. Wir schreiben $\Omega^{p,q}(M; E)$ für Schnitte des Bündels $\Lambda^{p,q}T^*M \otimes_{\mathbb{C}} E$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen Operator $\bar{\partial}^E \colon \Omega^{0,q}(M; E) \to \Omega^{0,q+1}(M; E)$, der in jeder holomorphen lokalen Trivialisierung die Gestalt $\bar{\partial} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}^r}$ hat.

(b) Es gilt $(\bar{\partial}^E)^2 = 0$ und auf $U \subset M$ beschreibt $\ker(\bar{\partial}^E \colon \Gamma(E) \to \Omega^{0,1}(M; E))$ genau die holomorphen Schnitte von $E|_U$.

Aufgabe 4

Sei $N(X, Y)$ der Nijenhuis-Tensor. Zeigen Sie:

(a) $N(X, Y)$ ist ein Tensor.

(b) Wenn (M, h) Kähler ist, dann gilt $N = 0$.

due on Thursday 15.11.18 (beginning of lecture)

Aufgabe 1

Let g be a Riemannian metrik and J an almost komplex strukture. Show that the following are equivalent:

(a) g is compatible with J.

(b) G is J-invariant.

(c) The form $\omega = g(J\cdot, \cdot)$ is alternating.

(d) $h = g + i\omega$ is a Hermitian scalar product.

Aufgabe 2

Show that the oriented real Grassmannian $\widetilde{Gr_2}(\mathbb{R}^{n+1})$ is isomorphic to the quadric

$$M = \{[z_0 \colon \ldots \colon z_n] \in \mathbb{CP}^n \mid z_0^2 + \ldots + z_n^2 = 0\}.$$

Aufgabe 3

Let (M, J) be a complex manifold and $E \to M$ a holomorphic vector bundle of rank r. We write $\Omega^{p,q}(M; E)$ for sections of the bundle $\Lambda^{p,q}T^* \otimes_{\mathbb{C}} E$.

(a) Show that there exists an operator $\bar{\partial}^E \colon \Omega^{0,q}(M; E) \to \Omega^{0,q+1}(M; E)$, that has the form $\bar{\partial} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}^r}$ in every local holomorphic trivialization.

(b) Show that $\bar{\partial}^2 = 0$ and that on $U \subset M$, the kernel $\ker(\bar{\partial}^E \partial \colon \Gamma(E) \to \Omega^{0,1}(M; E))$ describes exactly the holomorphic sections of $E|_U$.

Aufgabe 4

Let $N(X, Y)$ be the Nijenhuis tensor.

(a) Show that $N(X, Y)$ is a tensor.

(b) Show that if (M, h) is Kähler, then $N = 0$.