5. Übungsblatt

Differentialgeometrie II - Spezielle Holonomie

im WS 2018/19 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 22.11.18
(zu Beginn der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Es seien $U \subset \mathbb{C}^n, V \subset \mathbb{C}^m$ offen und $g = u + iv\colon U \to V$, $f\colon V \to \mathbb{C}^l$ glatt. Beweisen Sie die Kettenregeln:

(a) $\partial_j(f \circ g) = \sum_k \big((\partial_k f \circ g) \cdot \partial_j g_k + (\bar\partial_k f \circ g) \cdot \partial_j \bar g_k\big)$

(b) $\bar\partial_j(f \circ g) = \sum_k \big((\partial_k f \circ g) \cdot \bar\partial_j g_k + (\bar\partial_k f \circ g) \cdot \bar\partial_j \bar g_k\big)$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass es zu den Funktionen $f_j\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}^n$ eindeutige Kähler-Metriken h_j mit Kählerformen $\omega_j = i\partial\bar\partial f_j$ gibt und berechnen Sie diese.

(a) $\quad f_1(z) = \dfrac{\|z\|^2}{2}$ $\qquad$ (b) $\quad f_2(z) = \log(1 + \|z\|^2)$

Aufgabe 3

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇.

(a) Zeigen Sie, dass

$$(\nabla_X \alpha)(Y_1, \dots, Y_k) = X(\alpha(Y_1, \dots, Y_k)) - \alpha(\nabla_X Y_1, Y_2, \dots, Y_k) - \dots - \alpha(Y_, \dots, Y_{k-1}, \nabla_X Y_k)$$

einen Zusammenhang auf k-Formen definiert.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe der Cartan-Formel, dass

$$(d\alpha)(X_0, \dots, X_k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j (\nabla_{X_j}\alpha)(X_0, \dots, \hat X_j, \dots, X_k).$$

(c) Sei $(e_, \dots, e_n)$ ein lokaler orthonormaler Rahmen von (M, g). Zeigen Sie, dass dann

$$d\alpha = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, \cdot \rangle \wedge (\nabla_{e_j}\alpha)$$

gilt.

Aufgabe 4

Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $z_0 \in U$ und h eine Kähler-Metrik auf U. Zeigen Sie:

(a) Die Kähler-Form ω is eine (1,1)-Form.

(b) Es gibt eine Umgebung $V \subset U$ von z_0 und eine ∂-geschlossene (1,0)-Form β auf V, so dass $\omega|_V = \bar{\partial}\beta + \partial\bar{\beta}$.

(c) Es gibt eine Umgebung $W \subset V$ von z_0 und eine Funktion φ auf W, so dass $\bar{\beta}|_W = \bar{\partial}\varphi$.

(d) Es gibt eine reelle Funktion f auf W, so dass $\omega|_W = i\partial\bar{\partial}f$.

Hinweis zu b): Nach dem reellen Poincarélemma gibt es V und eine reelle 1-Form α mit $d\alpha = \omega|_V$.

due on Thursday 22.11.18 (beginning of lecture)

Aufgabe 1

Let $U \subset \mathbb{C}^n, V \subset \mathbb{C}^m$ be open and $g = u + iv \colon U \to V$, $f \colon V \to \mathbb{C}^l$ smooth. Prove the following chain rules:

(a) $\partial_j(f \circ g) = \sum_k \big((\partial_k f \circ g) \cdot \partial_j g_k + (\bar\partial_k f \circ g) \cdot \partial_j \bar g_k\big)$

(b) $\bar\partial_j(f \circ g) = \sum_k \big((\partial_k f \circ g) \cdot \bar\partial_j g_k + (\bar\partial_k f \circ g) \cdot \bar\partial_j \bar g_k\big)$

Aufgabe 2

Show that to each of the functions $f_j \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ on $\mathbb{C}^n$, there is a unique Kähler metric h_j with Kähler form $\omega_j = i\partial\bar\partial f_j$ und and compute it.

$$\text{(a)} \quad f_1(z) = \frac{\|z\|^2}{2} \qquad\qquad \text{(b)} \quad f_2(z) = \log(1 + \|z\|^2)$$

Aufgabe 3

Let (M, g) be a Riemannian manifold with Levi-Civita connection ∇.

(a) Show that

$$(\nabla_X \alpha)(Y_1, \ldots, Y_k) = X(\alpha(Y_1, \ldots, Y_k)) - \alpha(\nabla_X Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) - \ldots - \alpha(Y_, \ldots, Y_{k-1}, \nabla_X Y_k)$$

defines a connection on k-forms.

(b) Use the Cartan formula to show that

$$(d\alpha)(X_0, \ldots, X_k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j (\nabla_{X_j}\alpha)(X_0, \ldots, \hat X_j, \ldots, X_k).$$

(c) Let $(e_, \ldots, e_n)$ be a local orthonormal frame of (M, g). Show that in this case $d\alpha = \sum_{j=1}^n \langle e_j, \cdot\rangle \wedge (\nabla_{e_j}\alpha)$.

Aufgabe 4

Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $z_0 \in U$ und h eine Kähler-Metrik auf U. Zeigen Sie:

(a) Die Kähler-Form ω is eine (1,1)-Form.

(b) Es gibt eine Umgebung $V \subset U$ von z_0 und eine ∂-geschlossene (1,0)-Form β auf V, so dass $\omega|_V = \bar\partial\beta + \partial\bar\beta$.

(c) Es gibt eine Umgebung $W \subset V$ von z_0 und eine Funktion φ auf W, so dass $\bar\beta|_W = \bar\partial\varphi$.

(d) Es gibt eine reelle Funktion f auf W, so dass $\omega|_W = i\partial\bar\partial f$.

Hint for b): By the real Poincaré lemma, there is such a V and a real 1-form α such that $d\alpha = \omega|_V$.