8. Übungsblatt

Differentialgeometrie II - Spezielle Holonomie

im WS 2018/19 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 13.12.18 (zu Beginn der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Es seien $0 < k < n$ und $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ mit $|\lambda| < 1$ gegeben und $N = (\mathbb{C}^k \setminus \{0\})/\mathbb{Z} \subset (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$ Hopf-Mannigfaltigkeiten wie in Beispiel 4.51. Zeigen Sie:

(a) N ist komplexe Untermannigfaltigkeit von M.

(b) Die Inklusionsabbildung $N \hookrightarrow M$ ist homotop zu einer Abbildung mit reell eindimensionalem Bild.

Aufgabe 2

Es sei (M, h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit mit Krümmungstensor R. Zeigen Sie:

(a) Für alle $X, Y, U, V \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$g(R_{X,JY}JU, V) = g(R_{Y,JX}JU, V) = g(R_{X,JY}JV, U)$$

(b) Der folgende Ausdruck ist symmetrisch in X, Y, U, V:

$$Q(X, Y, U, V) := g(R_{X,JY}JU + R_{Y,JU}JX + R_{U,JX}JY, V)$$

(c) Die Werte von Q werden vollständig festgelegt durch $Q(X, X, X, X) = 3K(\langle X \rangle)\|X\|^4$ für alle $X \in T_pM \setminus \{0\}$.

(d) * Q bestimmt auch R.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}^n, h^{eukl})$, $(\mathbb{CP}^n, h^{FS})$ und $(\mathbb{CH}^n, h^{hyp})$ konstante holomorphe Schnittkrümmung haben.

(b) * Folgern Sie aus a), dass jede Kähler-Mannigfaltigkeit mit konstanter holomorphe Schnittkrümmung bis auf Skalierung lokal isometrisch zu einem der obigen Räume ist.

Aufgaben mit * sind freiwillige Ergänzungen.

Aufgabe 4

Es sei (M, h) Kähler-Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ und $z_1, \ldots, z_n$ seien homolorphe lokale Koordinaten auf $U \subset M$. Wir setzen g bilinear auf $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ fort. Zeigen Sie:

(a) Die Matrix $(g_{j\bar{k}})_{j,k}$ mit $g_{j\bar{k}} = g(\partial_j, \bar{\partial}_k)$ ist selbstadjungiert und positiv definit.

(b) Es gilt $\nabla_{\partial_j} \bar{\partial}_k = \nabla_{\bar{\partial}_k} \partial_j = 0$.

(c) Sei $(g^{\bar{j}k})_{j,k}$ die zu $(g_{j\bar{k}})_{j,k}$ inverse Matrix. Dann gilt $\nabla_{\partial_j} \partial_k = \sum_\ell \Gamma^\ell_{jk} \partial_\ell$ mit Christoffel-Symbolen $\Gamma^\ell_{jk} = \sum_m \partial_j g_{k\bar{m}} \cdot g^{\bar{m}\ell}$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass J parallel ist und $[\partial_j, \bar{\partial}_k] = 0$.

due on Thursday 13.12.18 (beginning of lecture)

Problem 1

Let $0 < k < n$ and $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ be given with $|\lambda| < 1$. Consider $N = (\mathbb{C}^k \setminus \{0\})/\mathbb{Z} \subset (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$ Hopf manifolds as in Example 4.51. Show the following:

(a) N is a complex submanifold of M.

(b) The inclusion map $N \hookrightarrow M$ is homotopic to some map with real one-dimensional image.

Problem 2

Let (M, h) be a Kähler manifold with curvature tensor R. Show the following:

(a) For all $X, Y, U, V \in \mathfrak{X}(M)$, we have

$$g(R_{X,JY}JU, V) = g(R_{Y,JX}JU, V) = g(R_{X,JY}JV, U)$$

(b) The following expression is symmetric in X, Y, U, V:

$$Q(X, Y, U, V) := g(R_{X,JY}JU + R_{Y,JU}JX + R_{U,JX}JY, V)$$

(c) The values of Q are determined by $Q(X, X, X, X) = 3K(\langle X\rangle)\|X\|^4$ for all $X \in T_pM\setminus\{0\}$.

Problem 3

(a) Show that $(\mathbb{C}^n, h^{eukl})$, $(\mathbb{CP}^n, h^{FS})$ und $(\mathbb{CH}^n, h^{hyp})$ have constant holomorphic sectional curvature.

(b) * Conclude from a) that every Kähler manifold with constant sectional curvature is locally isometric up to scaling to one of the above spaces.

Problem 4

Let (M, h) be a Kähler manifold with Levi-Civita connection ∇ and let $z_1, \ldots, z_n$ be holomorphic local coordinates in $U \subset M$. We extend g bilinearly to $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Show the following:

(a) The matrix $(g_{j\bar{k}})_{j,k}$ with $g_{j\bar{k}} = g(\partial_j, \bar{\partial}_k)$ is self-adjoint and positive definit.

(b) $\nabla_{\partial_j}\bar{\partial}_k = \nabla_{\bar{\partial}_k}\partial_j$.

(c) Let $(g^{\bar{j}k})_{j,k}$ be the inverse matrix to $(g_{j\bar{k}})_{j,k}$. Then $\nabla_{\partial_j}\partial_k = \sum_\ell \Gamma^\ell_{jk}\partial_\ell$ with Christoffel symbols $\Gamma^\ell_{jk} = \sum_m \partial_j g_{k\bar{m}} \cdot g^{\bar{m}\ell}$.

Hint: Use that J is parallel and $[\partial_j, \bar{\partial}_k] = 0$

Problems with * are voluntary.