9. Übungsblatt

Differentialgeometrie II - Spezielle Holonomie

im WS 2018/19 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 20.12.18 (zu Beginn der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Sei (M, g) ein Riemannscher symmetrischer Raum mit Punktspiegelungen I_p für jeden Punkt $p \in M$. Die Transvektionsgruppe $G(M)$ wird von den Kompositionen je zweier Punktspiegelungen erzeugt, also

$$G(M) := \langle I_p \circ I_q \mid p, q \in M \rangle \subset \mathrm{Iso}(M, g).$$

Wir definieren die Involution $\sigma = l_{I_x} r_{I_x}^{-1}$ auf $\mathrm{Iso}(M, g)$ für ein festes $x \in M$; es gilt also $\sigma(g) = I_x \circ g \circ I_x^{-1}$. Zeigen Sie:

(a) $G(M)$ ist invariant unter σ, es gilt also $\sigma(I_p \circ I_q) = I_{I_x(p)} I_{I_x(q)}$.

(b) $G(M)$ ist die kleinste Untergruppe von $\mathrm{Iso}(M, g)$, die transitiv auf M wirkt und invariant unter σ ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die in Aufgabe 1 definierte Transvektionsgruppe eines Riemannschen symmetrischen Raumes (M, g) eine zusammenhängende Lie-Untergruppe von $\mathrm{Iso}(M, g)$ ist.

Aufgabe 3

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir betrachten an einem Punkt $p \in M$ den Krümmungstensor R als Element von $\Lambda^2 T_p^* M \otimes \mathfrak{hol}_p(M, g)$. Auf $\mathfrak{g} = \mathfrak{hol}_p(M, g) \oplus T_p M$ definieren wir eine Abbildung $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ durch

$$[X, Y]_{\mathfrak{g}} = [X, Y]_{\mathfrak{hol}_p(M)}, \quad [X, u]_{\mathfrak{g}} = X(u), \quad [u, v]_{\mathfrak{g}} = -R_{u,v} \in \mathfrak{hol}_p(M)$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{hol}_p(M) \subset \mathrm{End}(T_p M)$ und $u, v \in T_p M$.

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra ist, wenn R ein $\mathfrak{hol}_p(M, g)$-invarianter Tensor ist, d.h.

$$R_{Xu,v} w + R_{u,Xv} w + R_{u,v} X w = X R_{u,v} w$$

für alle $X \in \mathfrak{hol}_p(M)$ und $u, v, w \in T_p M$.

Aufgabe 4

Es sei $A \supset \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$-Algebra mit einer Antiinvolution $\bar{\cdot}$, d.h., für alle $a, b \in A$ gilt $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$. Außerdem gelte $a\bar{a} \in \mathbb{R}$ und $a\bar{a} > 0$ für alle $a \neq 0$. Wir definieren auf $B = A^2$ eine Involution und eine Multiplikation durch

$$\begin{aligned} \overline{(a,b)} =& (\bar{a}, -b) \\ (a,b) \cdot (c,d) =& (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Wenn A kommutativ ist und $\bar{\cdot} = \mathrm{id}_A$ gilt, dann ist auch B kommutativ.

(b) Wenn A kommutativ und assoziativ ist, dann ist B assoziativ.

(c) Wenn A assoziativ ist, dann gilt

$$(a,b) \cdot \big(\overline{(a,b)} \cdot (c,d)\big) = \big((a,b) \cdot \overline{(a,b)}\big) \cdot (c,d).$$

(d) Für alle $(a,b), (c,d) \in B$ gilt

$$\begin{aligned} &(a,b) \cdot \overline{(a,b)} \in \mathbb{R} \times \{0\} \\ &(a,b) \cdot \overline{(a,b)} > 0 \text{ falls } (a,b) \neq (0,0) \\ &\overline{(a,b) \cdot (c,d)} = \overline{(c,d)} \cdot \overline{(a,b)}. \end{aligned}$$

Homework 9, due on Thursday 20.12.18 (beginning of lecture)

Problem 1

Let (M,g) be a Riemannian symmetric space with point reflections I_p for every point $p \in M$. The transvection group $G(M)$ is generated by the compositions of pairs of point reflection, i.e.

$$G(M) := \langle I_p \circ I_q \mid p, q \in M \rangle \subset \mathrm{Iso}(M,g).$$

We define the involution $\sigma = l_{I_x} r_{I_x}^{-1}$ on $\mathrm{Iso}(M,g)$ for some fixed $x \in M$, i.e., we have $\sigma(g) = I_x \circ g \circ I_x^{-1}$. Prove the following:

(a) $G(M)$ is invariant under σ, i.e., we have $\sigma(I_p \circ I_q) = I_{I_x(p)} I_{I_x(q)}$.

(b) $G(M)$ is the smallest subgroup of $\mathrm{Iso}(M,g)$, which acts transitively on M and is invariant under σ.

Problem 2

Prove that the transvection group of a Riemannian symmetric space (M,g) as defined in Problem 1 Aufgabe 1 definierte Transvektionsgruppe is a connected Lie-subgroup of $\mathrm{Iso}(M,g)$.

Problem 3

Let (M,g) be a Riemannian manifold. At a point $p \in M$, we consider the curvature tensor R as an element of $\Lambda^2 T_p^* M \otimes \mathfrak{hol}_p(M,g)$. On $\mathfrak{g} = \mathfrak{hol}_p(M,g) \oplus T_p M$, we define a map $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ by

$$[X,Y]_{\mathfrak{g}} = [X,Y]_{\mathfrak{hol}_p(M)}, \quad [X,u]_{\mathfrak{g}} = X(u), \quad [u,v]_{\mathfrak{g}} = -R_{u,v} \in \mathfrak{hol}_p(M)$$

for all $X, Y \in \mathfrak{hol}_p(M) \subset \mathrm{End}(T_p M)$ and $u, v \in T_p M$.
Show that $\mathfrak{g}$ is a Lie-algebra, if R is a $\mathfrak{hol}_p(M,g)$-invariant tensor, i.e., if

$$R_{Xu,v} w + R_{u,Xv} w + R_{u,v} X w = X R_{u,v} w$$

holds for all $X \in \mathfrak{hol}_p(M)$ and $u, v, w \in T_p M$.

Problem 4

Let $A \supset \mathbb{R}$ be an $\mathbb{R}$-algebra with an anti-involution $\bar{\cdot}$, i.e., for all $a, b \in A$, we have $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$. Furthermore, assume that $a\bar{a} \in \mathbb{R}$ and $a\bar{a} > 0$ for all $a \neq 0$. We define an involution and a multiplication on $B = A^2$ by

$$\begin{aligned} \overline{(a,b)} =& (\bar{a}, -b) \\ (a,b) \cdot (c,d) =& (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}). \end{aligned}$$

Prove the following:

(a) If A is commutative and $\bar{\cdot} = \mathrm{id}_A$, then B is commutative.

(b) If A is commutative and associative, then B is associative.

(c) If A is associative, then

$$(a,b) \cdot \left(\overline{(a,b)} \cdot (c,d)\right) = \left((a,b) \cdot \overline{(a,b)}\right) \cdot (c,d).$$

(d) For all $(a,b), (c,d) \in B$, we have

$$\begin{aligned} &(a,b) \cdot \overline{(a,b)} \in \mathbb{R} \times \{0\} \\ &(a,b) \cdot \overline{(a,b)} > 0 \text{ if } (a,b) \neq (0,0) \\ &\overline{(a,b) \cdot (c,d)} = \overline{(c,d)} \cdot \overline{(a,b)}. \end{aligned}$$