Proseminar über Flächen

im Wintersemester 18/19 bei Prof. Dr. S. Goette, D. Hein

Das Proseminar gliedert sich in drei Teile: elementare Topologie (Vorträge 1–6), Klassifikation geschlossener Flächen (Vorträge 7–11), sowie Fundamentalgruppen (Vorträge 12–14).

1. **Topologische Räume, Metrische Räume,** 16. 10. [Jä] 1.1, 1.2, 1.5, 1.7; [Lee] S. 17–26, S. 31–32
   Definition topologischer Raum, metrischer Raum, metrische Topologie. Konvergenz und Stetigkeit in topologischen Räumen; Vergleich mit metrischem Fall (vgl. [Lee] Übg. 2.2). Charakterisierung und Eigenschaften stetiger Abbildungen ([Lee] Lemma 2.1, 2.2, 2.7, Beispiele 2.4, 2.5). Definition des Hausdorffraums, Eigenschaften, Beispiele und Gegenbeispiele ([Lee], Problem 3.8, evtl. Zariski-Topologie [Quelle?]), [Lee] Lemma 2.14.

2. **Topologische Mannigfaltigkeiten und erste Beispiele,** 23. 10. [Lee] S. 30–34 [Jä] 1.4,6.1
   Definition Basen, Subbasen z.B.[Jä] 1.5, Abzählbarkeitsaxiome, Bedeutung und Beispiele (Zum ersten Abzählbarkeitsaxiom: [Jä] 6.3; zum zweiten: [Lee], Lemma 2.15, Probleme 2-5, 3-7). Definition topologische Mannigfaltigkeit, Beispiele $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, [Lee] Lemma 2.16.

3. **Neue Räume aus alten I — Unterräume und Produkte,** 30. 10. [Lee] Kap.3, S. 39–51,[Jä] 1.3
   Definition topologischer Unterräume, [Lee] Ex. 3.2; universelle Eigenschaft (Theoreme 3.3, 3.9). Prop. 3.4 (Beweis skizzieren, Punkte *g*–*i* ausführlicher), Beispiele 3.5, 3.6, 3.7. Definition des Produktes; universelle Eigenschaft ([Lee], Theoreme 3.10, 3.11), Prop.3.12 (nur d, f, g beweisen); Prop.3.13, 3.14 und Lemma 3.15. Evtl. allgemein Initialtopologien (vergleiche die Theoreme 3.3 und 3.10).

4. **Neue Räume als alten II — Summen und Quotienten,** 6. 11. [Lee] S. 52–58, [Jä] 3.1–3.3
   Topologische Summe ([Jä] 1.3), universelle Eigenschaft ([Br] VI,6.2, [Lee], Probleme 2-9, 3-3). Äquivalenzrelationen, Definition des Quotientenraums, elementare Eigenschaften ([Lee] Lemmata 3.19, 3.20, 3.21, Beispiele 3.18, 3.22, 3.27, 3.28), universelle Eigenschaft (Theoreme 3.29, 3.31, Korollare 3.30, 3.32). Außerdem [Jä] 3.2 Notiz 1. Vorsicht mit Hausdorff-Eigenschaft ([Lee], Problem 3-8). Evtl. allgemein Finaltopologien (vergleiche universelle Eigenschaften).

5. **Kompaktheit,** 13. 11. [Lee] S. 73–80, [Jä] 1.8, 6.3
   Definition kompakter Räume (Wdh. aus Analysis II), *wichtig:* Hausdorff-Eigenschaft zur Kompaktheit hinzunehmen! Wichtige Eigenschaften ([Jä] 1.8, Bem. 1–3, Lemma und Satz, [Lee] Theoreme 4.18, 4.20, 4.25 , Prop. 4.19) 4.18, [Jä] 1.8 Bem.1); *Achtung:* in [Lee] 4.19 e zusätzlich voraussetzen, dass der Quotient Hausdorffsch ist. Abzählbarkeit und verschiedene Varianten von Kompaktheit (insbes. folgenkompakt, [Lee] Prop. 4.24).

6. **Zusammenhang,** 20. 11. [Lee] S. 65–73, [Jä] 1.6
   Definition und Eigenschaften von Zusammenhang (Wdh. aus Analysis II; [Lee], Prop 4.2, 4.4, 4.5, Theoreme 4.3, 4.6) und Wegzusammenhang (Theorem 4.7). Beispiele 4.8–4.10. Außerdem

   Satz. *Eine topologische Mannigfaltigkeit ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.*

   Dies folgt sofort aus [Lee] Lemma 4.16, Prop.4.17.

7. **Simpliziale Komplexe im $\mathbb{R}^n$,** 27. 11. [Lee] Kap.5, [Jä] 7.1, [Schu] III§2
   Für die Klassifikation geschlossener Flächen benutzt man sogenannte *polygonale Flächendarstellungen*, deren geometrische Realisierungen eine Verallgemeinerung 2-dimemsionaler simpliziale Komplexe im $\mathbb{R}^n$ sind. Dieser Vortrag soll daher eine Einführung in die simplizialen Komplexe im $\mathbb{R}^n$ geben[1]: affine Simplizes im $\mathbb{R}^m$, Untersimplizes, simpliziale Komplexe und Unterkomplexe, simpliziale Abbildungen ([Lee], S. 91–95; [Jä] 7.1). Mannigfaltigkeiten in Dimension 1–3 besitzen simpliziale Darstellungen ([Lee], Theoreme 5.10, 5.12, 5.13, 6.1 jeweils ohne Beweis). Evtl. Baryzentrische Unterteilung, Eulerzahl ([Lee], S. 109–113).

[1] Simpliziale Komplexe kann man auch rein kombinatorisch definieren.

8. **Neue Räume aus alten III — Klebekonstruktionen,** 4. 12. [Lee] S. 119–122, S. 126–129
   Verkleben topologischer Räume ([Jä] 3.7), Beispiele ([Lee] Prop. 6.2, 6.3), zusammenhängende Summe von Mannigfaltigkeiten ([Lee] S. 126–129, Prop.6.6, Beispiele 6.7, 6.8 und [Jä] Bsp. 3).

9. **Polygonale Flächendarstellungen,** 11. 12. [Lee] S. 123–126, 129–132
   Erzeugung von Flaechen durch Verkleben der Seiten eines Polygons (Prop. 6.4), Beispiele ([Lee], Ex. 3.24, 6.5), Formalisierung ([Lee], S. 129–132, insbes. Lemma 6.9).

10. **Rechnen mit Flächendarstellungen,** 18. 12. [Lee] 133–138
    Beispiele von Flächendarstellungen ([Lee], Ex 6.10), elementare Umformungen (Prop. 6.11, vollständigen Beweis ausarbeiten), Anwendungen: zusammenhängende Summe, Beispiele (Prop. 6.12, Ex. 6.13, Lemmata 6.15, 6.16).

11. **Klassifikation geschlossener Flächen,** 8. 1. [Lee] S. 138–143
    Hauptsatz: Jede Fläche ist zusammenhängende Summe von Sphären, Tori und projektiven Ebenen ([Lee], Theorem 6.14). Eulerzahl, evtl. Orientierbarkeit ([Lee], Theorem 6.17, Prop. 6.18, 6.19).

12. **Homotopie und Fundamentalgruppe I — Konstruktion,** 15. 1. [Lee] S. 148–156
    Homotopie von Abbildungen ([Lee], Lemmata 7.1, 7.2 Ex. 7.4, 7.5) und Wegen (Lemma 7.7). Definition der Fundamentalgruppe, Hintereinanderschaltung von Wegen (Lemma 7.8), Gruppenaxiome prüfen (Theorem 7.9). Abhängigkeit vom Basispunkt ([Lee] Theorem 7.11), Definition von einfachem Zusammenhang. evtl. Kriterium für Nullhomotopie (Lemma 7.13).

13. **Homotopie und Fundamentalgruppe II — Abbildungen,** 22. 1. [Lee] S. 158–164
    Fundamentalgruppe und stetige Abbildungen ([Lee] Lemmata 7.14, 7.15, Prop.7.16), evtl. Kategorien und Funktoren *kurz* einführen ([Lee], S. 170–172, Beispiele aus linearer Algebra). Anwendungen (Cor 7.17), Definition von Retrakten (mit Prop. 7.18), Deformationsretrakten, Zusammenziehbarkeit ($\mathbb{R}^n \simeq \mathrm{pt}$, evtl. weitere Beispiele), Homotopieäquivalenz (Lemma 7.22, evtl. Ex. 7.19, 7.20, 7.23, 7.26). Homotopieinvarianz der Fundamentalgruppe (Theorem 7.24, Lemma 7.29), Folgerung: $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend.

14. **Die Fundamentalgruppe des Kreises,** 29. 1. [Lee], S. 180–187
    Die Fundamentalgruppe des Kreises S^1 ist $\mathbb{Z}$ ([Lee], Theorem 8.1, Lemmata 8.2–8.6). Evtl. Anwendung: Satz von Brouwer (Problem 8-9).

15. **Fundamentalgruppen von Flächen,** 5. 2. [Lee], S. 187–189, 210–212, 221–227
    Dieser Vortrag sollte nur einen Überblick geben. Evtl. Sphären, Tori, Produkte (Theorem 8.7, Cor. 8.8, Prop 8.9, Cor 8.10). Satz von Seifert-van Kampen (Theorem 10.1, Beweis nur skizzieren), Fundamentalgruppe der Flächen ([Lee], Ex. 10.10, Cor 10.13 ohne Beweis).

Literatur

[Lee] John M. Lee; Introduction to Topological Manifolds, Springer GTM202, 2000

[Jä] K. Jänich, Topologie, 7.Auflage, Springer,2001

[Br] Th. Bröcker, Analysis I, 2.Auflage, Spektrum, 1995

[Schu] H. Schubert, Topologie, Teubner, 3.Auflage, 1971