5.1 Bruchrechnung – Multiplikation:

Moana Klein
Sarah Englmeier

Bruchrechnen ist oft ein größeres Problem bei Schülern. Im Folgenden sollen zwei Möglichkeiten aufgezeigt werden, um den Schülern das Multiplizieren von Brüchen verständlicher zu machen und ihnen einen Zugang zu diesem Thema zu verschaffen.

<u>1.Möglichkeit: Säfte</u>

Vorbereitung

Plastikbecher 0,3L und 0,5L; 1L Orangensaft; 1L Traubensaft

Konkrete Umsetzung

Beispiel: „3/4 von 2/7“ und „2/7 von 3/4“

Ein Schüler soll nach vorne an das Pult kommen und die 2/7 Orangensaft herstellen. Dazu muss er einen Liter Orangensaft gleichmäßig auf sieben Becher verteilen (Abb. 1). Fünf von diesen werden auf die Seite gestellt und mit zweien wird weitergearbeitet (Abb. 2). Ein anderer Schüler soll nun weitermachen und die 3/4 von diesen 2/7 Saft erzeugen. Dazu muss er der den Inhalt der zwei Becher, gleichmäßig auf vier Becher verteilen (Abb. 3). Nimmt man nun drei dieser Becher, erhält man die gewünschten „3/4 von 2/7“ Orangensaft (Abb. 4).

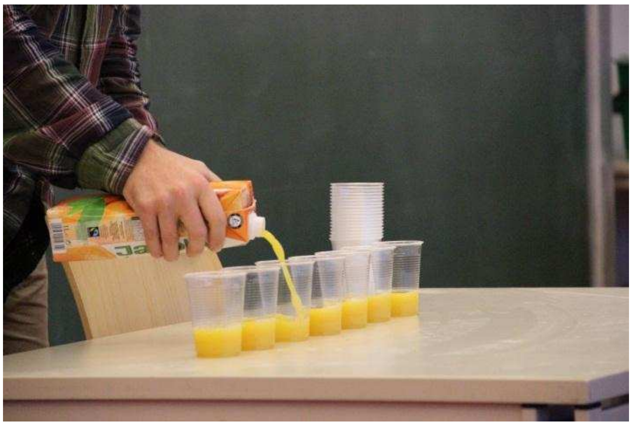


Abb.1

Abb. 2

Abb. 3

Abb.4

Nun stellt der Lehrer die Frage, ob man mehr Saft am Ende erhält, wenn man „2/7 von 3/4“ oder „3/4 von 2/7“ Saft nimmt. Sind die Schüler für die erste Antwort, sollen sie es mit nach oben gerichtetem Daumen anzeigen; bei der zweiten Antwort mit nach unten gerichtetem Daumen. Eventuell kann hier auch eine kleine Diskussion eingebracht werden, was für die jeweiligen Antwortmöglichkeiten spricht.

Nun wird der andere Fall analog zum ersten Fall durchgespielt, nur nimmt man statt des Orangensaftes Traubensaft zur besseren Unterscheidung (Vorsicht: Hier größere Becher benutzen, als beim ersten Durchlauf!).
Die vom Lehrer gestellt Frage kann nun beantwortet werden, indem ein Schüler die Inhalte, der bei beiden Durchläufen am Ende übrig gebliebenen Becher, in zwei neue Becher eingießt. Der Vergleich zeigt, dass zum Schluss gleich viel Traubensaft und Orangensaft vorhanden ist (Abb. 5).

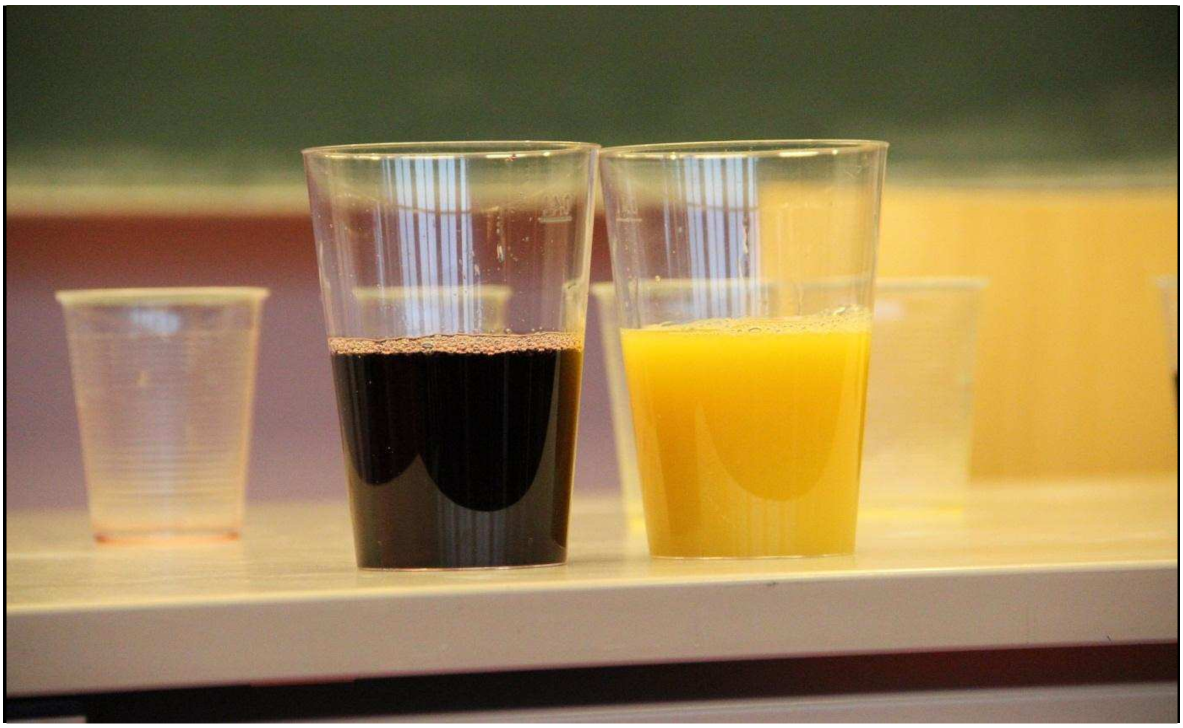


Abb.5

2.Möglichkeit: Stifte

Konkrete Umsetzung

Beispiel: „2/5 von 2/3“

Pro Schülerpaar wird ein Operator 1 und 2 festgelegt. An den linken Rand des Tisches werden 15 Stifte gelegt. Operator 1 nimmt nun 2/3 der 15 Stifte weg, also zehn Stifte, und reicht sie an Operator 2 weiter. Dieser nimmt dann 2/5 von diesen zehn Stiften und legt das Ergebnis, also vier Stifte, an den rechten Rand des Tisches.

Nun soll „2/3 von 2/5“ genommen werden.

Dazu tauschen die Operatoren die Plätze. Operator 2 nimmt dann zuerst 2/5 von den 15 Stiften, also sechs Stifte, und gibt sie weiter an Operator 1, welcher dann davon 2/3 nimmt, also vier Stifte, und legt sie wieder an den rechten Rand.

Abb. 6

Hintergründe

Didaktische Schwierigkeiten
Bei der Multiplikation von Brüchen gibt es mehrere didaktische Schwierigkeiten, denen sich ein Lehrer bewusst sein sollte.
Bei der bisherigen Multiplikation war das Ergebnis immer größer als jeder einzelne Faktor. Es bereitet den Schülern einige Probleme, zu verstehen, dass bei der Multiplikation von Zahlen zwischen Null und Eins das Ergebnis kleiner wird. Außerdem gibt es oft Unklarheiten darüber, ob beispielsweise das Ergebnis von „2/3 von 2/5“ das Gleiche ist wie „2/5 von 2/3“. Deshalb sollte auf einen guten Übergang von der haptischen auf die symbolische Ebene geachtet werden. Es ist entscheidend, dem Schüler den Rollenwechsel des Bruchs vom Anteil zum Operator klar zu machen. Am besten ist es, mindestens zwei verschiedene Beispiele zu bringen, da das Gehirn mindestens zwei braucht, um das System zu erkennen und zu verinnerlichen.

Beispiel: Säfte
<u>Größe und Menge der Becher</u>
Zuerst sollte man darauf achten, mehr Becher hinzustellen, als die Schüler später brauchen, denn so muss sich der Schüler selbst Gedanken machen, wie viele er benötigt. Es wäre auch möglich, weniger Becher hinzustellen oder bei dem Beispiel mit dem Traubensaft den Schüler nicht darauf aufmerksam zu machen, größere Becher zu benutzen. So wird das Ganze problemorientierter.

<u>„Redestab“ und nonverbale Kommunikation</u>
Um die Klasse während des Experiments ruhig zu halten, gibt es die Möglichkeiten, die Saftflasche als „Redestab“ fungieren zu lassen. So ist gesichert, dass lediglich nur eine Person redet.
Die Schwierigkeit bei einem Experiment an der Tafel ist alle Schüler mit einzubeziehen und die Aufmerksamkeit aller Schüler zu bekommen. Die Frage, ob „2/7 von 3/4“ oder „3/4 von 2/7“ mehr sind und die Abfrage über nonverbale Kommunikation (Daumen hoch, Daumen runter) fördern hierbei die Teilnahme aller Schüler.

Beispiel: Stifte
Durch die Partnerarbeit wird die individuelle Auseinandersetzung mit dem Problem gewährleistet. Das enaktive Arbeiten ermöglicht dem Schüler zu verstehen, dass das Ergebnis nicht von der Position des Operators abhängt (Platzwechsel), das heißt, dass „2/5 von 2/3“ das Gleiche sind wie „2/3 von 2/5“.
Sollte nun die Frage gestellt werden, warum man genau 15 Stifte benötigt, können Sie auf eine der nächsten Stunden verweisen, in denen die Schüler den von Ihnen angewandten Trick (kleinster gemeinsamer Nenner!) lernen werden.

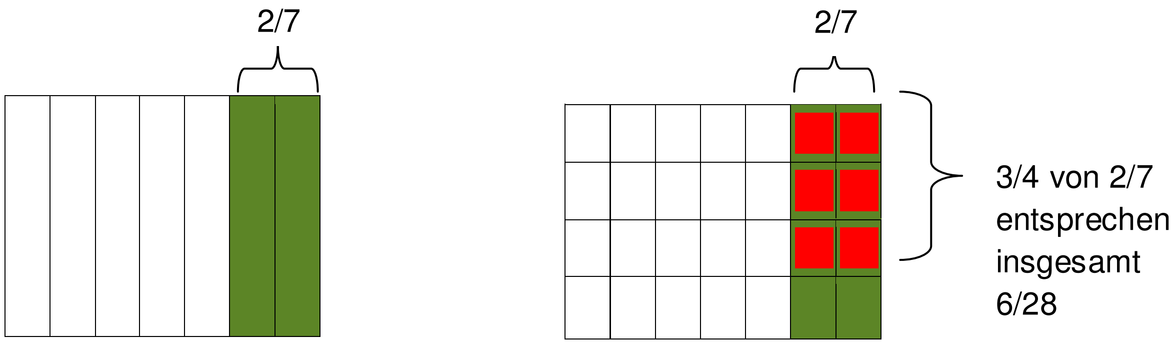
5.2 Problembehandlung: Von „von“ zu „mal“

Monja Beirer
Julia Weber

Die bisherige Rolle des Bruches als Anteil wird nun auf die des Operators übertragen. Dazu betrachtet man den Anteil eines Anteils als Multiplikation der beiden Brüche, was den Übergang von „von“ zu „mal“ widerspiegelt.

Konkrete Umsetzung

Jeder in der Klasse benötigt ein DIN A4 Blatt, mit welchem der haptische Vorgang repräsentiert werden soll. Es werden zwei leichte Brüche ausgewählt. Diese seien beispielsweise 2/7 und 3/4 und die Aufgabe lautet, 3/4 von 2/7 zu nehmen. Der Schüler soll zunächst 2/7 mit dem Blatt darstellen, indem er es in 7 gleich große Teile faltet und zwei dieser Teile farblich markiert, beispielsweise in grün. Die restlichen Teile werden umgefaltet, sodass sie nicht mehr sichtbar sind. Als nächstes sollen 3/4 von der grün eingefärbten Fläche, die nun als neues Ganzes gilt, genommen werden. Dies bedeutet, dass die grüne Fläche in vier gleich große Teile geteilt wird und drei davon farblich anders markiert werden, z.B. in rot. Insgesamt haben die Schüler den Anteil 3/4 vom Anteil 2/7 dargestellt, denn das vollständig aufgefaltete DIN A4 Blatt besteht nun aus 28 gleich großen Teilen, von denen 6 zweifarbig unterlegt sind.



Die rot-grün gefärbte Fläche wird nun als Rechteck aufgefasst, dessen Inhalt berechnet werden soll, d.h. man berechnet 3/4 „mal“ 2/7 und erhält 6/28, was genau der Größe der zweifarbig markierten Fläche entspricht.

Hintergrund

Das Ziel dieser Übung ist, dass die Schüler die bisherige Vorstellung der Multiplikation zweier Zahlen a und b als Berechnung der Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b auf das Multiplizieren eines Anteils dieser Zahlen, z.B. a/2 und b/3, projizieren. Dabei werden die Anteile der Seitenlängen miteinander multipliziert, was im obigen Beispiel bedeutet, dass ein kleineres Rechteck berechnet wird. Somit dient die grafische Darstellung als Schlüssel von „von“ zu „mal“.

5.3 Division

Verschiedene Vorstellungen des Teilens

Jonathan Müller

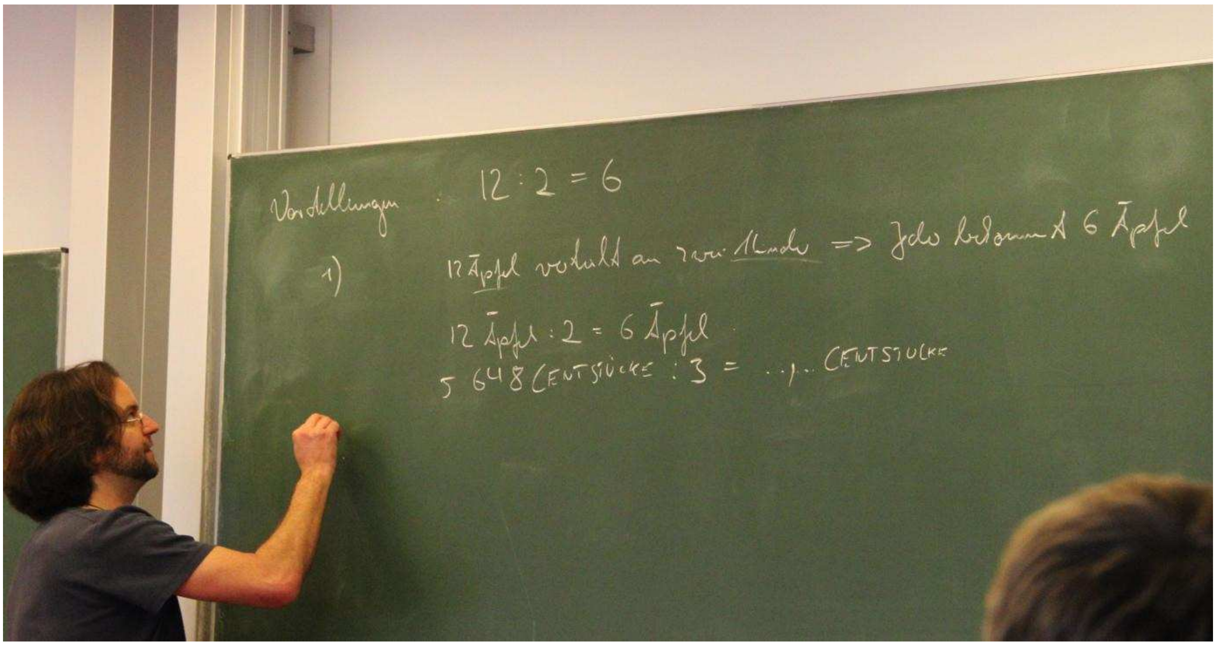
Konkrete Umsetzung

Die Schüler werden gefragt, wie sie (in unserem Beispiel) 12 Äpfel gleichmäßig an zwei Kinder verteilen würden. Es gibt zwei Möglichkeiten:

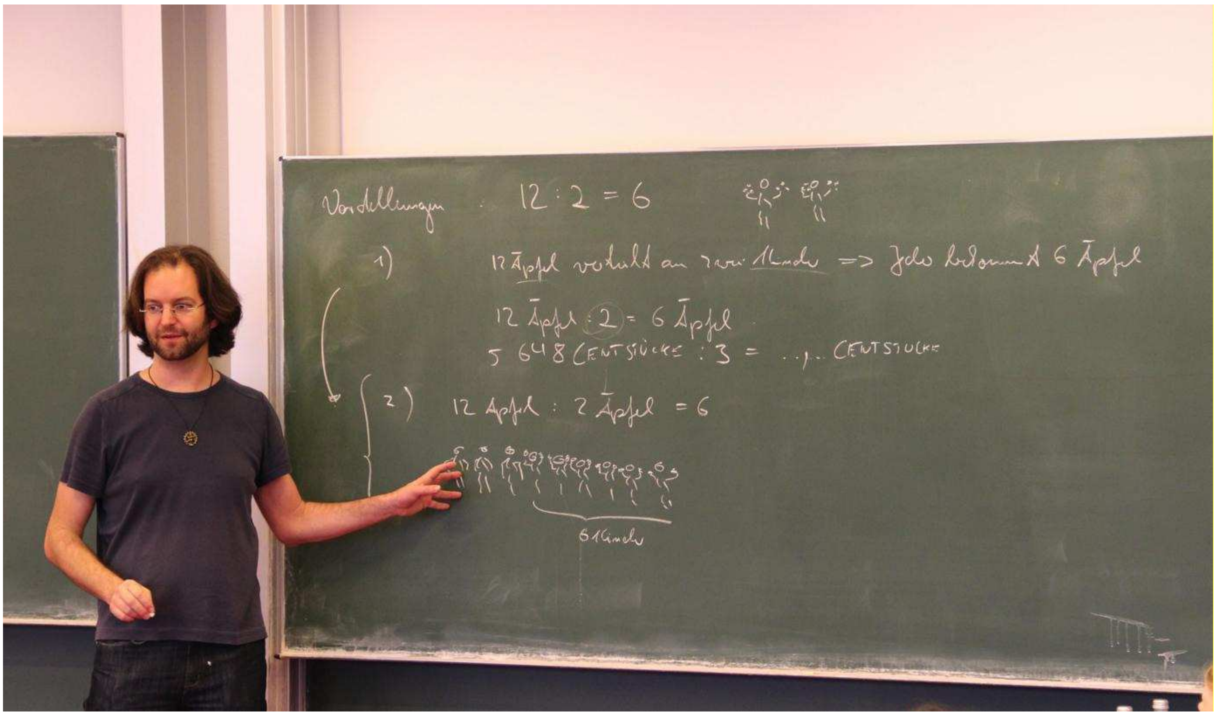
Entweder kann man die Äpfel gleichmäßig auf die beiden Kinder aufteilen.

Frage: Wir verteilen 12 Äpfel auf zwei Kinder. Wie viele Äpfel bekommt jedes Kind?

Antwort: Jedes Kind bekommt 6 Äpfel.



Oder man lässt beliebig viele Kinder je zwei Äpfel nehmen und überlegt, wie viele Kinder sich zwei Äpfel nehmen können.



Frage: Wir haben 12 Äpfel. Wie vielen Kindern können wir zwei Äpfel geben?

Antwort: 6 Kinder bekommen je zwei Äpfel.

Hintergründe

Divisionsvorstellungen

Schüler einer 6. Klasse stellen sich bei einer Aufgabe wie beispielsweise 12 : 2 (meist) eher die erste Variante vor. Dies führt jedoch zu Schwierigkeiten, wenn die Schüler mit größeren Zahlen rechnen sollen, da dies dann zu utopischen Problemen führt. (Bsp.: 100.000 Äpfel : 2 Kinder = 50.000 Äpfel für ein Kind)

Es fällt den Schülern i.d.R. leichter, wenn sie (alternativ oder zusätzlich) eine andere Vorstellung der Division haben – unsere zweite Variante. (→ 100.000 Äpfel : 2 = 50.000 Kinder bekommen zwei Äpfel)

Beispielaufgabe

Die Beispielaufgabe sollte kleine Zahlen enthalten und beispielsweise durch Äpfel und Kinder vorstellbar gestaltet werden – am Besten von den Schülern selbst, da diese dann einen näheren Bezug zur Problematik des Teilens bekommen.

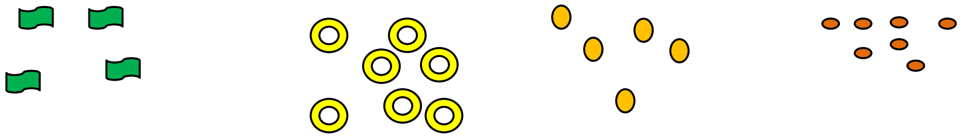
5.4 Teilbarkeit durch 3

Jens Franken

Konkrete Umsetzung

Zu Beginn der Unterrichtstunde müssen die Schüler eine Fläche (am besten vor der Tafel) frei räumen, damit die Klasse sich um einen Tisch im Kreis versammeln kann. Zur Vorbereitung muss der Lehrer 4-6 10€-scheine und mehrere 1€-Stücke mitbringen. Falls möglich auch einen 100€-Schein, um das Interesse der Schüler an der Aufgabe zu steigern. Die 10 Cent und die 1 Cent Stücke lässt der Lehrer sich von seinen Schülern geben. Das Geld wird nun auf dem Tisch ausgebreitet und sortiert.

<u>Beispiel:</u> 10 Euroscheine 1 Euromünzen 10 Cent Münzen 1 Cent Münzen



4 7 5 7 = 4757

Nachdem das Geld sortiert ist, beginnt der/die Lehrer/in nach der vor den Schülern liegenden Zahl zu fragen, die durch das Geld dargestellt wird. Gleich anschließend erfragt er die Teilbarkeit durch 3 dieser Zahl. Die Zahl ist schnell herausgefunden, jedoch bleibt die Lösung auf die Frage nach der Teilbarkeit noch offen. Es ist sehr wichtig, den Schülern bewusst zu machen, dass nicht nach der Summe des Geldes, die jeder erhält, gefragt ist, sondern dass die Frage nach der Teilbarkeit im Vordergrund steht.

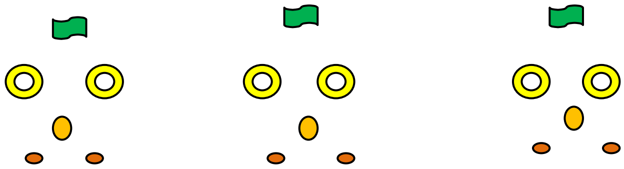
Um dies zu lösen, lässt sich der/die Lehrer/in drei persönliche Gegenstände von drei Schülern geben und legt diese vor dem Geld auf den Tisch.

Jetzt lässt man einzelne Schüler zum Tisch kommen, die nacheinander das Geld auf die Gegenstände verteilen. Es bleibt nun ein Rest übrig.

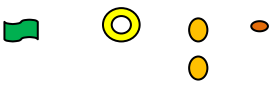
<u>Beispiel:</u> Zahl 4757

-Gegenstände 1.) 2.) 3.)

-Aufteilung des Geldes



-Übergebliebenes Geld (Rest)



Nun wird der 10€-Schein durch die entsprechende Anzahl von Eineuromünzen ersetzt, welche wiederum auf die Gegenstände verteilt werden. Dabei bleiben wieder zwei 1€-Münzen übrig. Diese werden nun durch Zehncentmünzen ersetzt und wieder aufgeteilt. Das Verfahren wird so lange wiederholt, bis wie bei unserem gewählten Beispiel, 2 Eincentmünzen übrig bleiben. Es wird nun deutlich, dass die Quersumme (:=Anzahl des Materials; Geld Münzen und Scheine) ausschlaggebend für die Teilbarkeit durch drei ist, denn wenn die Quersumme selbst durch drei teilbar ist, so gilt dies auch für die ursprüngliche Zahl.

Hintergünde

Gruppendynamik

Es entsteht eine Gruppendynamik, indem sich die Schüler in den Kreis integrieren. Dadurch beteiligt sich jeder Schüler an der bevorstehenden Aufgabe und ist gleich nahe an dem Geschehen.

Personalisierung von Gegenständen

Die drei persönlichen Gegenstände der Schüler (z.B. Uhr, Handy, Schlüsselbund) bilden eine Personalisierung und lassen den Schüler näher an dem Geschehen teilnehmen, ohne dass Schüler direkt vor die ganze Klasse treten müssen und der Gefahr der Bloßstellung unterliegen.

Haptisches Lernen

Erinnerungen, welche man mit alltäglichen Gegenständen verbinden kann, bleiben jedem Schüler besser im Gedächtnis. So hat man in diesem Fall Geldmünzen benutzt, um Schüler einen besseren Bezug zu etwas zu geben, was sie schon kennen.

Rollen im Unterricht

Es ist wichtig, dass der Lehrer nicht das ganze Geld auf den Tisch legt, damit sich Schüler daran beteiligen. Wenn der Lehrer den Schülern hier keine Eigenbeteiligung zulässt, ist diese Aufgabe nicht mehr beliebig. Es ist auch hier sehr wichtig, wer etwas tut, da etwas, was man selber tut, viel besser im Gedächtnis bleibt. Als Lehrer stehen einem viele Möglichkeiten offen, die Anzahl der Münzen zu steuern, ohne dass Schüler merken, gesteuert zu werden und eine „Beliebigkeit“ verloren geht.

1.5. Der Schlüssel zum Lösen von Potenzaufgaben

Yannick Fautz

Konkrete Umsetzung

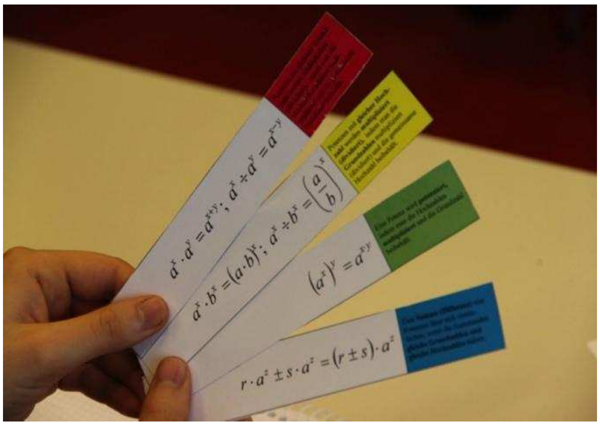
Als Unterrichtsvorbereitung sollte der Lehrer eine Vorlage anfertigen, auf der sich die vier Potenzgesetze in Form von Streifen befinden. Neben den symbolischen Darstellungen der einzelnen Gesetze, müssen sich auf den Papierstreifen auch die dazugehörigen wörtlichen Formulierungen befinden.

Zur farblichen Codierung der einzelnen Rechenregeln eignen sich die Farben:

rot - gelb - grün - blau.

Auf Papier ausgedruckt werden diese in der Unterrichtsstunde ausgeteilt.

Jeder Schüler schneidet sich je einen der farblich unterschiedlichen Streifen ab und heftet diese anschließend mit einer Klammer zusammen. Im Anschluss erfolgt der Arbeitsauftrag der Lehrperson.



Die Schüler werden dazu aufgefordert, sich selbstständig eine Rechenaufgabe auszudenken, die möglichst alle vier Potenzregeln beinhaltet.

Der Klasse sollte ausreichend Zeit zur Verfügung stehen, um sich mit dem Arbeitsauftrag beschäftigen zu können. Danach wird eine Aufgabe, die dem oben genannten Kriterium entspricht, an die Tafel geschrieben.

Beispielsweise: $\left(\frac{(a^3)^4}{a^2 * a^4} * b^6\right) + 2(a * b)^6$

Vier Schüler, die Kleidungsstücke in den vier Farben tragen oder deren Oberteile die Farben wenigstens zum Teil aufweisen, werden nach vorne gebeten (Farbschüler).

Sie vertreten jeweils die Potenzregel ihrer Farbe. Der Lehrer beauftragt nun die Klasse, die Aufgabe an der Tafel durch schrittweise Abstimmung zu lösen. Jeder Einzelne muss dazu lediglich durch Hochhalten eines Papierstreifens oder alternativ durch einen farbigen Stift signalisieren, welche Rechenoperation durchgeführt werden soll.

Der Farbschüler, dessen Farbe am häufigsten hochgehalten wird, führt die Rechenoperation seiner Potenzregel - im Idealfall mit der passenden Farbkreide - aus. Nachdem auch ein bis zwei weitere Aufgaben erfolgreich an der Tafel gelöst wurden, sollen sich die Schüler nun alleine daran versuchen.

Hintergründe

Farbcodierung

Die Ampelfarben rot, gelb und grün werden von uns, insbesondere, wenn sie zusammen in Erscheinung treten, besonders stark wahrgenommen. Infolge dessen ordnen wir dem Potenzgesetz, auf das in der Regel nicht so oft zurückgegriffen wird, die Farbe Blau zu.

Werden die einzelnen Rechenschritte zusätzlich mit der dazugehörigen Farbkreide ausgeführt, so sind die einzelnen Farben noch enger mit den entsprechenden Rechengesetzen vernetzt und bleiben dadurch noch besser im Gedächtnis.

Die nonverbale Kommunikation findet in dieser konkreten Umsetzung mittels der Farbcodierung statt.

Gruppenfreundliche Lernumgebung

Stellvertretend für die unterschiedlichen Potenzregeln stehen die Farbschüler an der Tafel, wodurch die Rechenregeln personalisiert werden. Hierbei ist die Lernumgebung so geschaffen, dass praktisch kein Schüler vorgeführt wird, da diejenigen, die an der Tafel stehen, in der Klasse nachfragen können.

Falls ein Schüler doch Probleme an der Tafel bekommen sollte, kann der Lehrer immer noch eine Helferperson bestimmen, die die passende Farbe hochhält. So ist stets die ganze Klasse miteinbezogen.

Haptisches Lernen

Erinnerungen geraten nicht so schnell in Vergessenheit, wenn man Gegenstände besitzt, mit denen diese verknüpft sind.
In diesem Fall ist es der angefertigte, farbige Schlüsselbund, den letztlich jeder Schüler mit nach Hause nehmen kann.
Die Verwendung des Wortes Schlüsselbund rührt von der Form der zusammengeklammerten Papierstreifen.
Außerdem erscheint die Metapher des Schlüsselbundes als sehr treffend, da die Potenzregeln mit der dazugehörigen Farben einem Bund mit vier Schlüsseln gleicht, wodurch Schritt für Schritt beziehungsweise "Tür für Tür" die Lösung erschlossen wird.

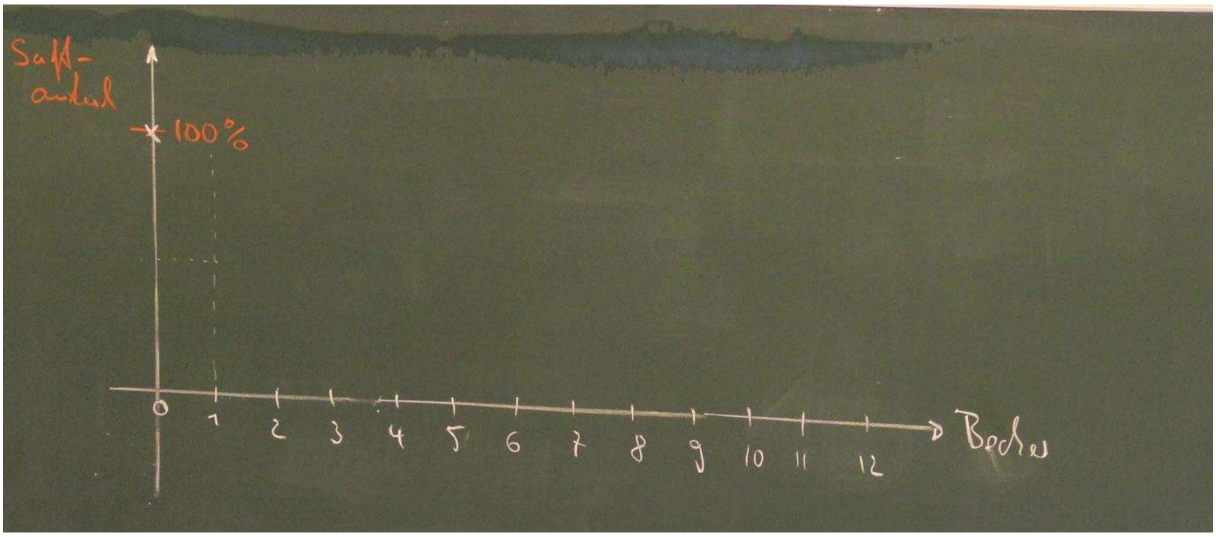
1.6. Das Potenzieren

Angelina Ruhland

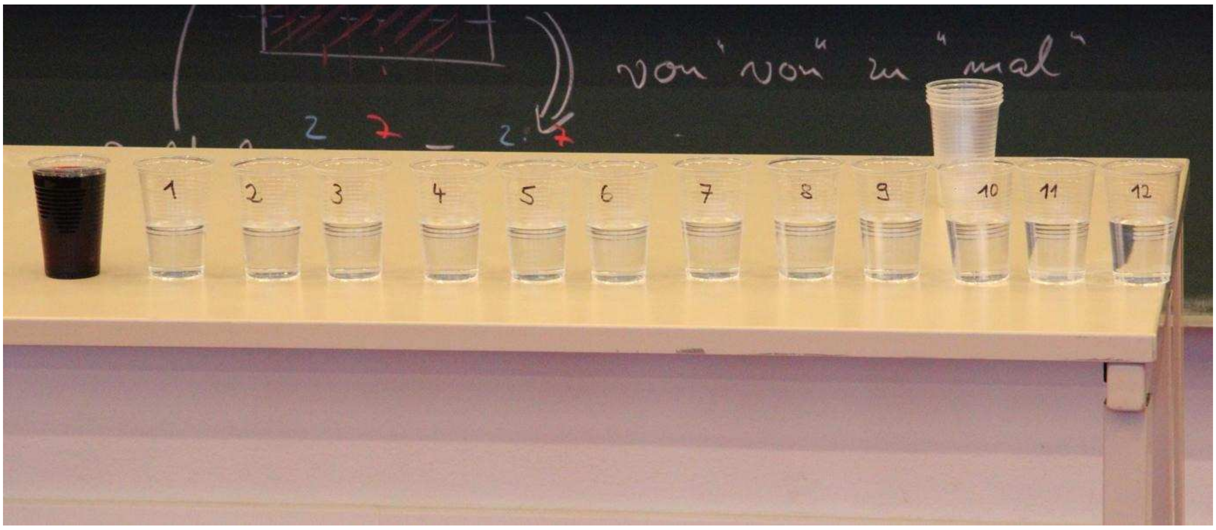
Konkrete Umsetzung

Benötigtes Material:
- Augenbinde
- Dunkler Saft (Bsp. Traubensaft)
- Leitungswasser (In Flaschen abgefüllt)
- Wasserfester Filzstift
- 15 Durchsichtige Plastikbecher (0,2l Volumen)

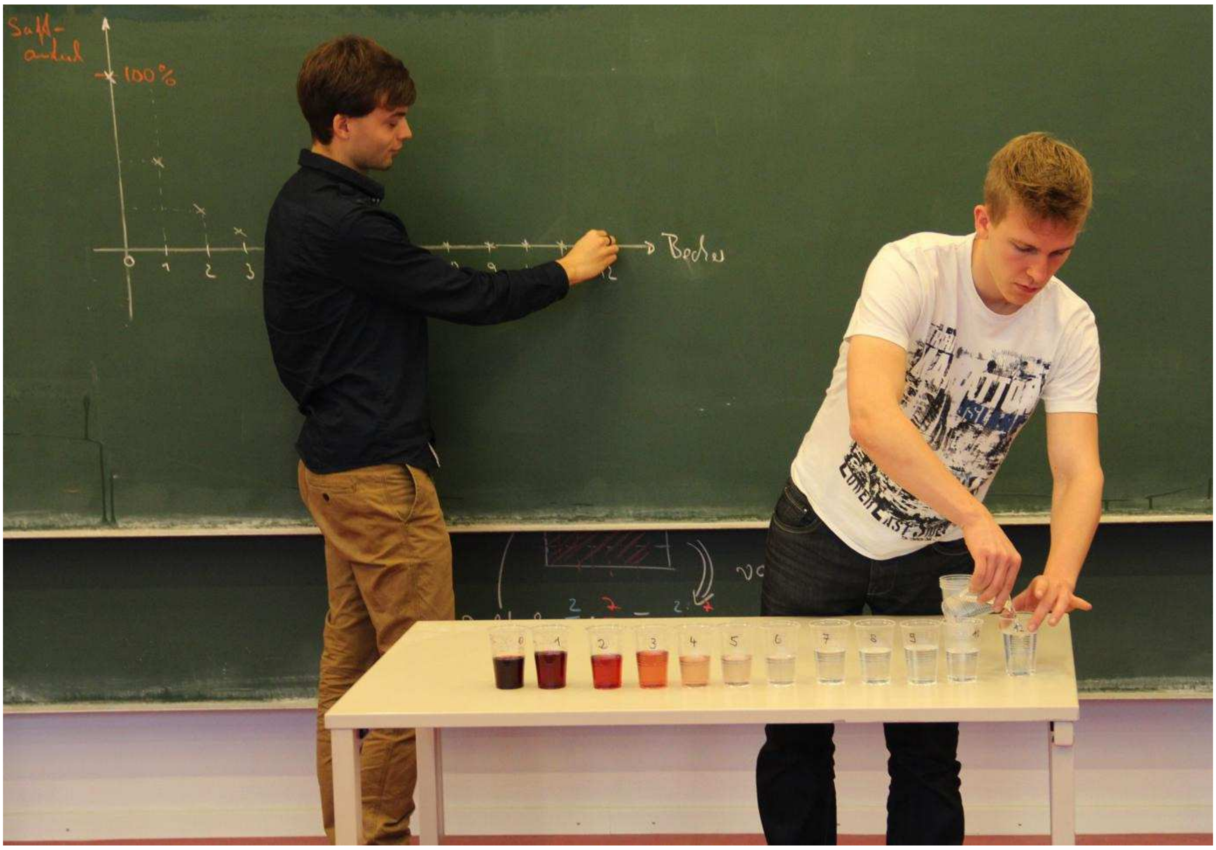
Für dieses Experiment benötigt man einen freien Platz vor der Tafel und einen Tisch. Nummerieren sie 12 der durchsichtigen Becher mit Hilfe des wasserfesten Filzstiftes und geben sie 6 Schülern jeweils 2 Becher. Nun stellen Sie ihnen die Wasserflaschen hin und bitten sie, einen Becher zu füllen und daraufhin die Hälfte des vollen Bechers in den leeren Becher zu gießen. Währenddessen kann die Lehrkraft ein Koordinatensystem an die Tafel zeichnen, das später als Diagramm dienen soll.



Nachdem die Schüler die Becher gleichmäßig gefüllt haben, stellt die Lehrkraft die Becher der Reihe nach auf dem freien Tisch vor der Tafel auf und reiht einen mit 0 beschrifteten Becher, der zu 100% mit Traubensaft gefüllt ist, daneben ein.



Nun werden 2 Schüler gebeten, nach vorne zu kommen und gemäß dem Gesetz der Gleichzeitigkeit, die Becher umzugießen und zugleich den Saftanteil in das Diagramm einzutragen. Die Hälfte des Inhalts des 0. Bechers wird in den 1. Becher gegossen und dann die Hälfte des 1. Bechers in den 2. und so weiter, bis alle Becher einen gewissen Saftanteil enthalten.



Nun kann man mit den Schülern folgende Fragen erarbeiten:

Wie oft muss man weiterschütten, bis man den Becher „unendlich“ gefüllt hat?

Es ist klar, dass man unendlich oft schütten muss.

Aber wie kann man denn den Becher „unendlich“ aufzeichnen?

Hier kann man schön sehen, dass man auf die Art und Weise, induktiv nie auf unendlich kommt. Man kann zusätzlich auch darauf anspielen, dass Unendlich nicht als Zahl beschrieben werden kann, da es keine ist. Man könnte zusätzlich noch einwerfen, was es also bedeuten würde, den Becher „unendlich“ herzustellen.

Aufgabe an die Schüler:

Den Becher „unendlich“ von einer bestimmten Potenz unterscheiden.

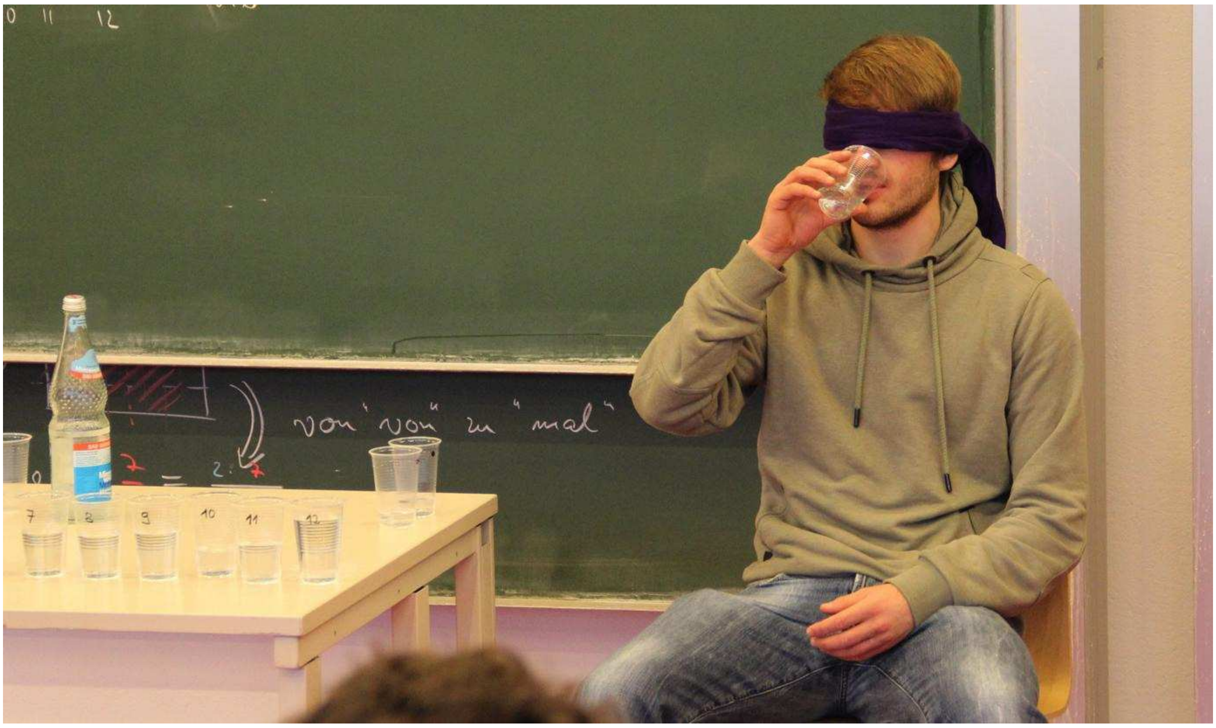
Konkrete Frage:

Bis zu welcher Frage trauen Sie es sich zu, den Becher „unendlich“ von einer Potenz, nur durch riechen und schmecken, zu unterscheiden.

Die Antwort wird durch Fingerzeigen als Non-Verbale-Kommunikation aufgezeigt.

Nun werden drei Becher nebeneinander auf einen Tisch gestellt. Ein Freiwilliger kommt nach vorne und ihm werden die Augen verbunden. Dadurch wird ein personeller Bezug zur Klasse hergestellt, die nun Teil des Versuchs ist. Frage an die Klasse: Wie viel Prozent Fruchtsaftgehalt enthält der Becher mit der

Fruchtmischung? Nachdem die Augen verbunden wurden, wird das Leitungswasser in die mit einem schwarzen Punkt markierten Becher gefüllt. Der Punkt sorgt dafür, dass die Fruchtsaftmischung nicht am Geruch des wasserfesten Filzstiftes erkannt wird. Der Schüler versucht nun den richtigen Becher zu erschmecken.



Hier kann auch noch hintergründig etwas von der Stochastik mit eingeflochten werden.

Mögliche Fragen an die Schüler:

Wie viel Prozent Fruchtgehalt sind in der x. Potenz?

Für wie viele Becher Saftschorle reicht die Saftpackung bei dieser Verdünnung?

Wie viele Liter Flüssigkeit erreicht man mit dieser Verdünnung?

Frage an die Oberstufe: Wie mische ich beispielsweise den Becher 6,5?

Zum Ende kann man mit Hilfe des Diagramms die Formel des Graphen herleiten.

$$\frac{1}{2}^x \rightarrow 0,2l * (\frac{1}{2})^x \frac{1}{2}^x \rightarrow 0,2l * (\frac{1}{2})^x$$

Hintergründe

Gesetz der Gleichzeitigkeit

Das Gesetz besagt, dass Elemente, die sich gleichzeitig bewegen, auch zusammen gehören. So werden bei den Schülern die enaktive (Becher) und die symbolische Ebene (Tafeldiagramm) verknüpft.

Nonverbale Kommunikation

Kein Schüler leidet unter Vorführung und alle werden gleichzeitig zum Mitdenken aufgefordert. Das ist ungefähr das Gegenteil von herkömmlichem Unterricht. Dort wird ein einziger Schüler vor allen Augen abgefragt, die Gefahr der Bloßstellung ist exorbitant hoch. Jede Aussage hat mehrere Botschaften[1]. Neben dem Informationsanteil des Schätzwertes ist gleichzeitig eine Selbstoffenbarung mit im Spiel. Man macht eine andere Aussage über sich selbst, ob man zwei oder zwanzig Finger anzeigt. Es ist spannend zu sehen, wer was vermutet.[2]

Aufbau eines persönlichen Bezugs

Die Schüler werden selbst ein Teil des Experiments und das steigert die Konzentration ebenso, wie die Lernbereitschaft. Auch fällt es den Schülern leichter, sich an Dinge zu erinnern, die sie selbst erlebt haben.

---

[1] Vgl. Schulz von Thun, *Miteinander reden,* Band I, Rowohlt [48]2010

[2] Vgl. Kramer, Martin , Ausarbeitung 47KW, Freiburg 2012