

Hundert Jahre Raumzeit - Simulationen und Visualisierungen der Relativitätstheorie

Lehrerfortbildung in Freiburg, Abteilung für Didaktik der Mathematik

Michael Bürker

Michael.buerker@math.uni-freiburg.de

Gliederung

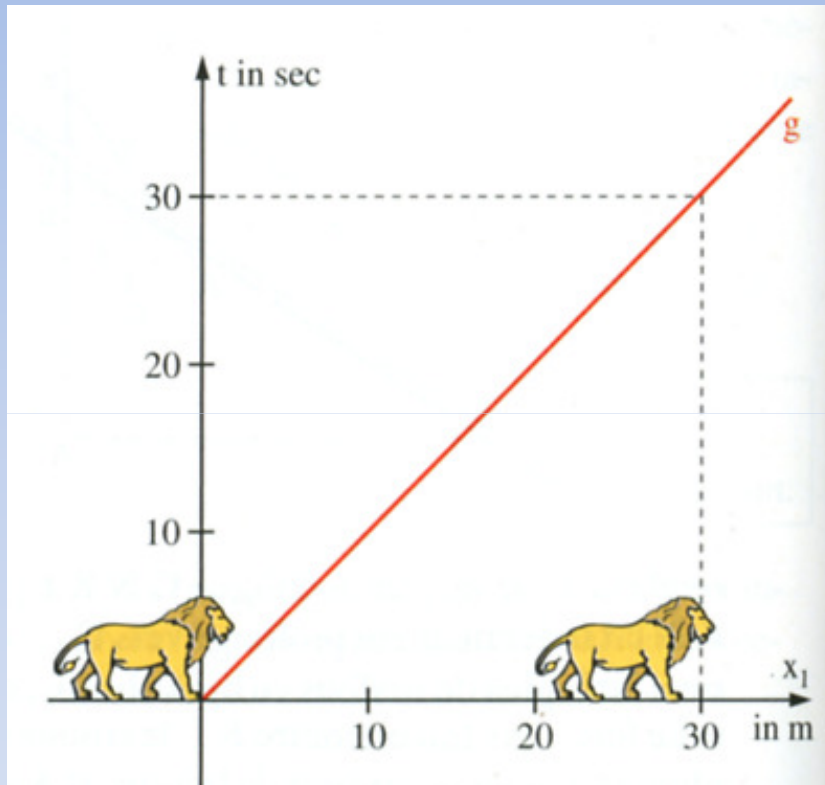
- *Weg-Zeit-Diagramme*
- *Grundprinzipien der speziellen Relativitätstheorie*
- *Drei Symmetrieprinzipien*
- *Die abbildungsgeometrische Interpretation der Lorentztransformation*
- *Lorentz-Kontraktion und Zeit-Dilatation*
- *Das Zwillingsparadoxon*
- *Umsetzung im Mathematikunterricht*

*„Von Stund‘ an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig
zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden
soll Selbständigkeit bewahren“.*



Hermann Minkowski in einem Vortrag
vor Naturforschern und Ärzten 1908

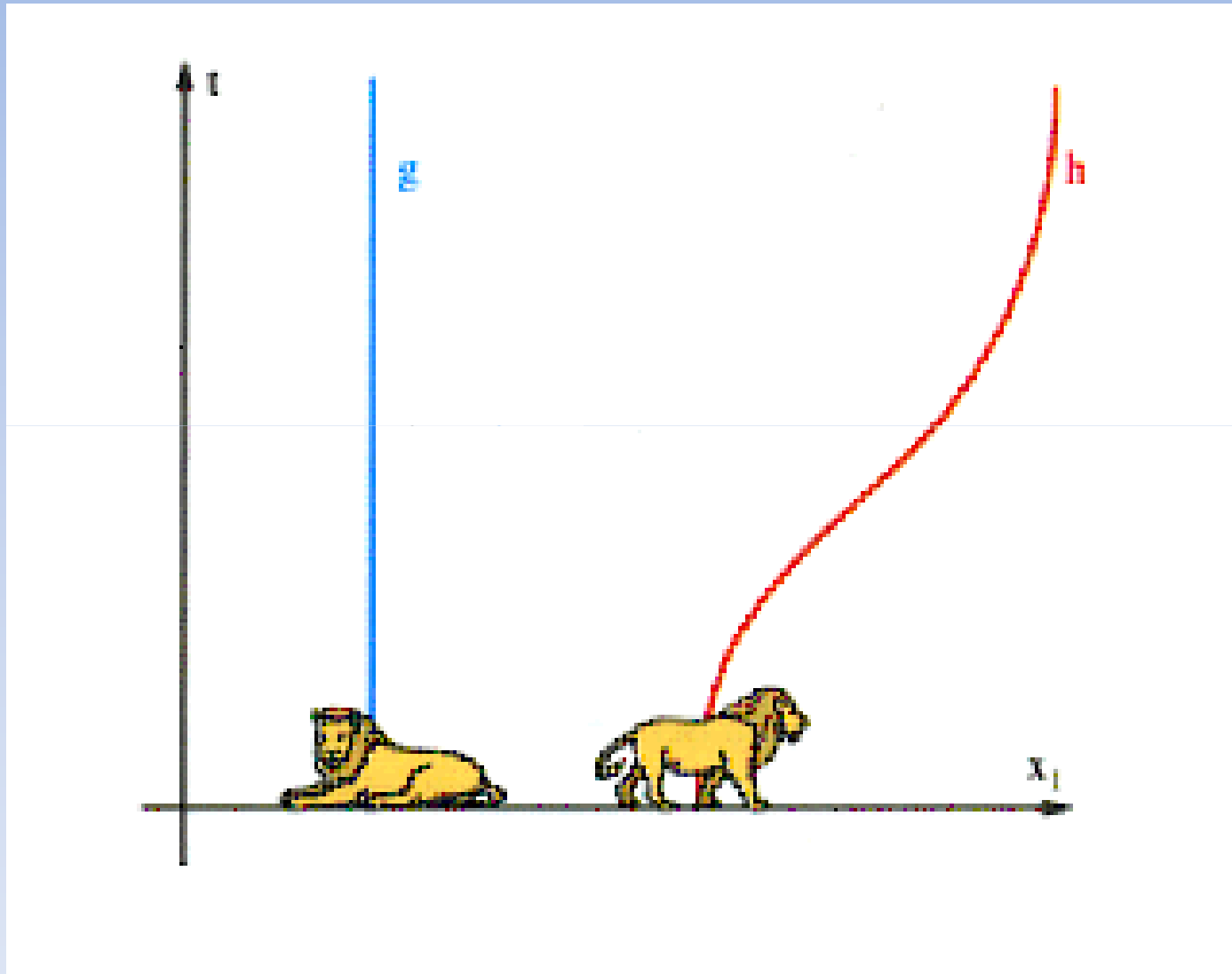
Weg-Zeit-Diagramm



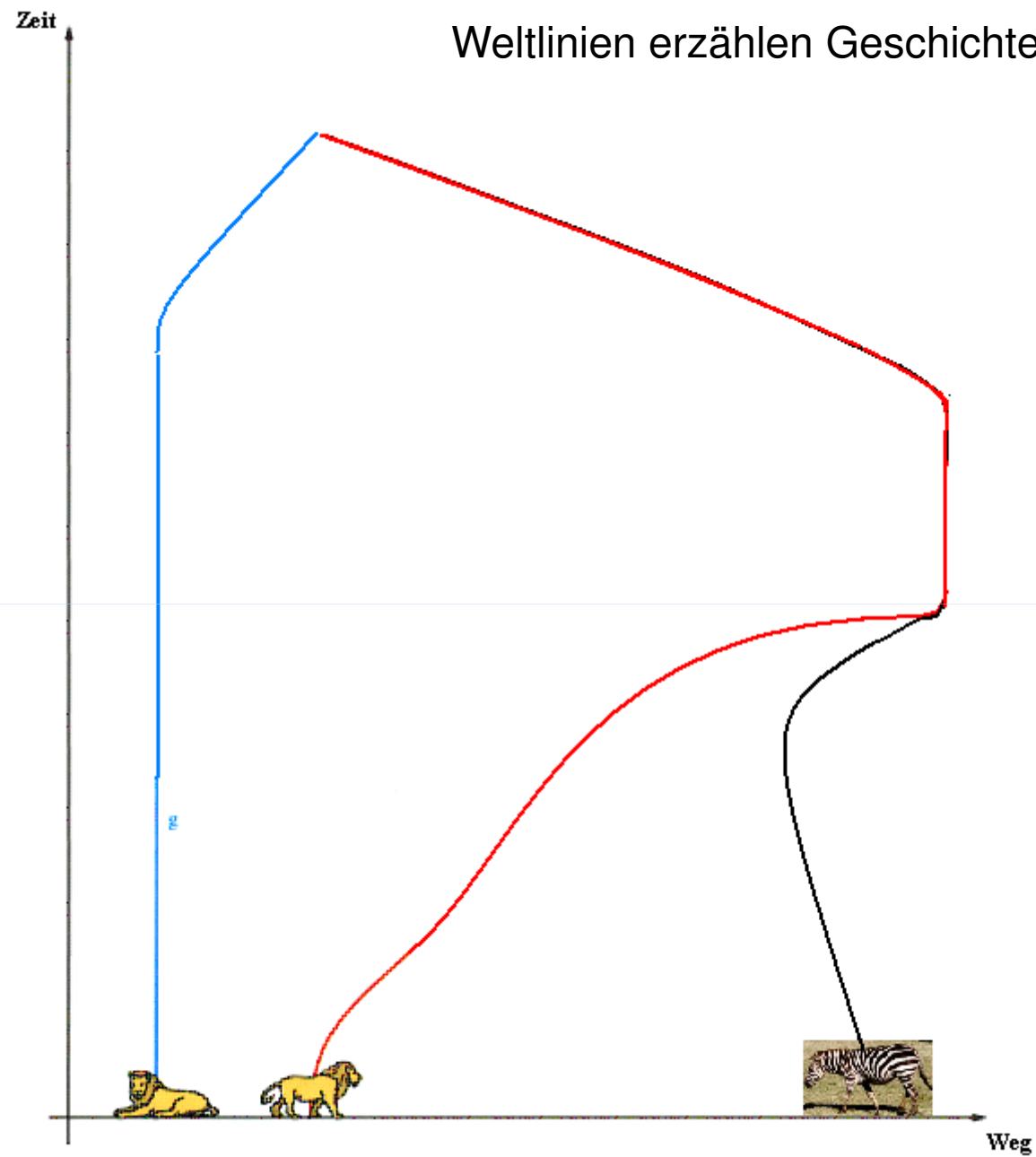
Aus Lambacher-Schweizer:
Analytische Geometrie, OS,
„Mathematische Exkursion“

Vertauschung der Weg-Zeit-Achse!

Weltlinien oder Ereignisse



Weltlinien erzählen Geschichten!

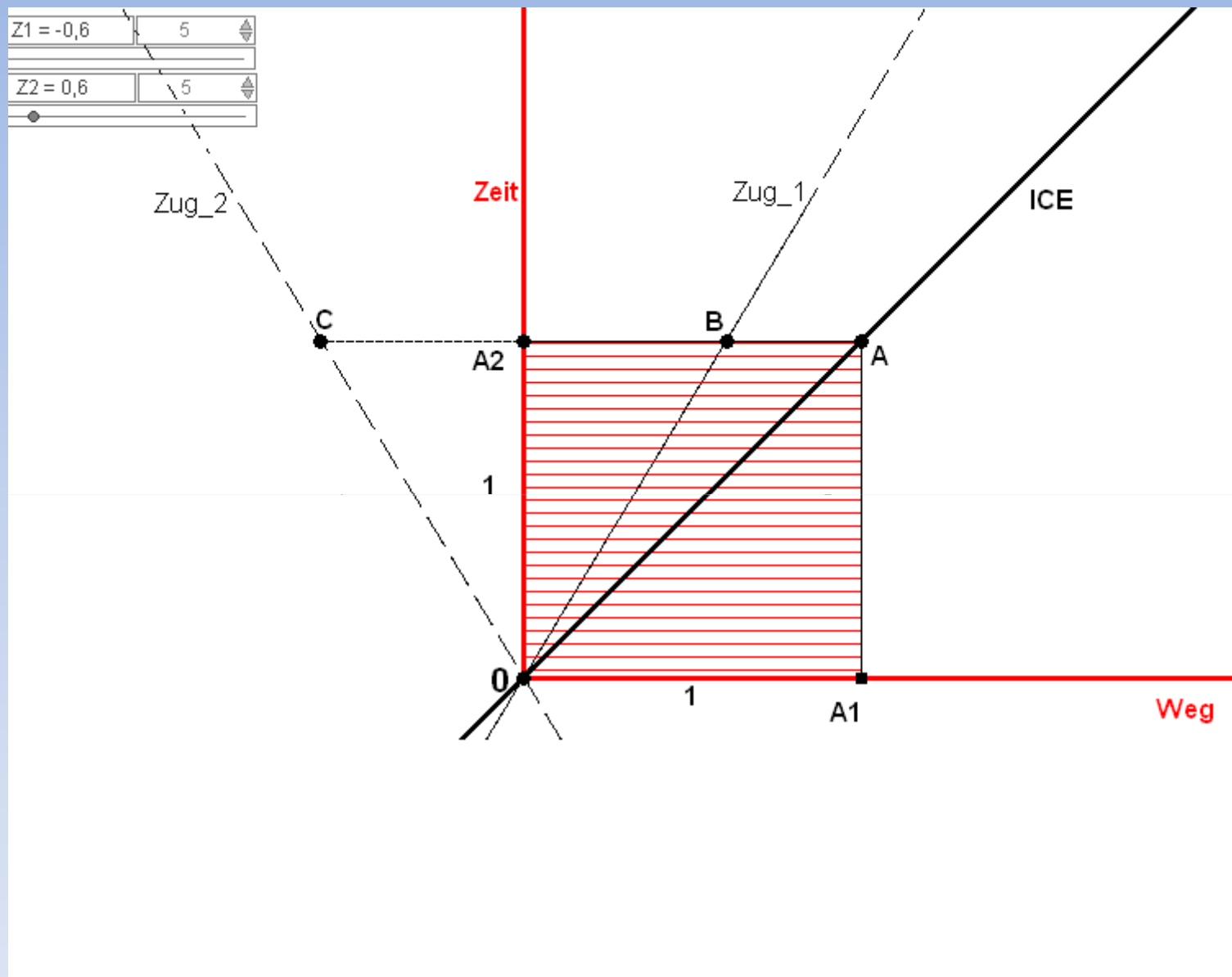


Schiefe Koordinatensysteme

- *Psychologisch wichtig:*
- *Arbeiten mit schiefen Koordinatensystemen*
- *Wir werden sehen:*
- *Die Schiefwinkligkeit bringt Vorteile!*

Weg-Zeit-Diagramme bei Zügen

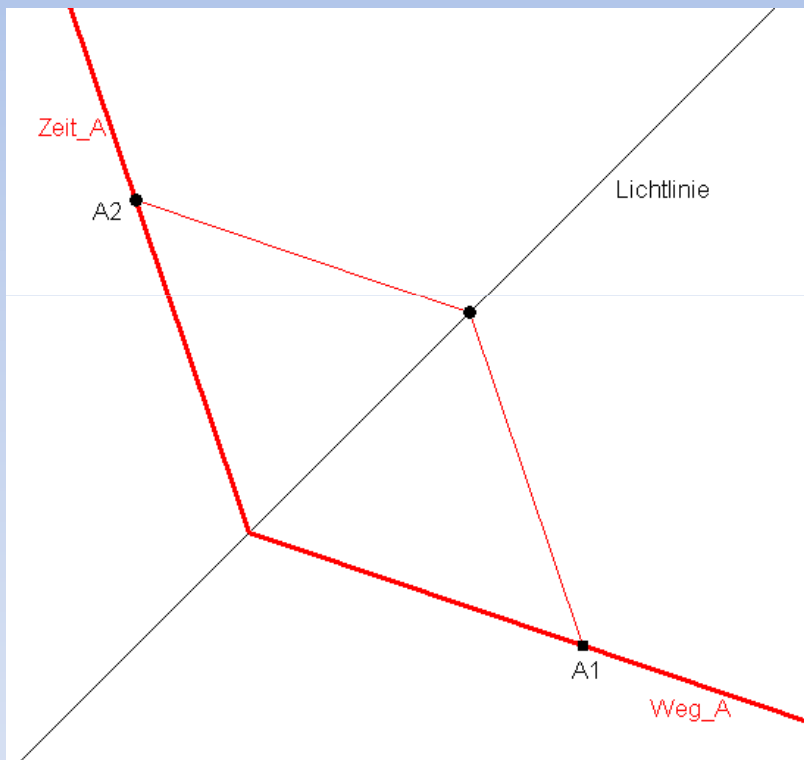
- *Die Bewegung des schnellsten Zugs wird durch die erste Winkelhalbierende dargestellt.*



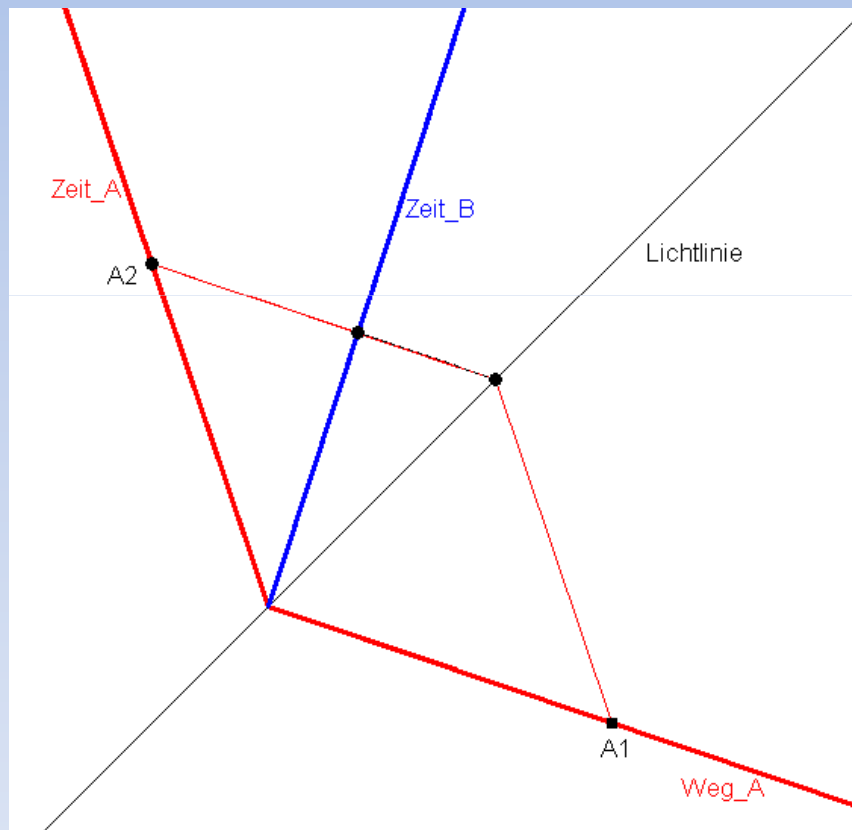
Physikalische Grundprinzipien

1. *Die Lichtgeschwindigkeit ist **konstant**.*
2. *Sind zwei Bezugssysteme gegeneinander gleichförmig bewegt, so nehmen die Naturgesetze in beiden Systemen die gleiche Form an.*

Bezugssystem des Beobachters A



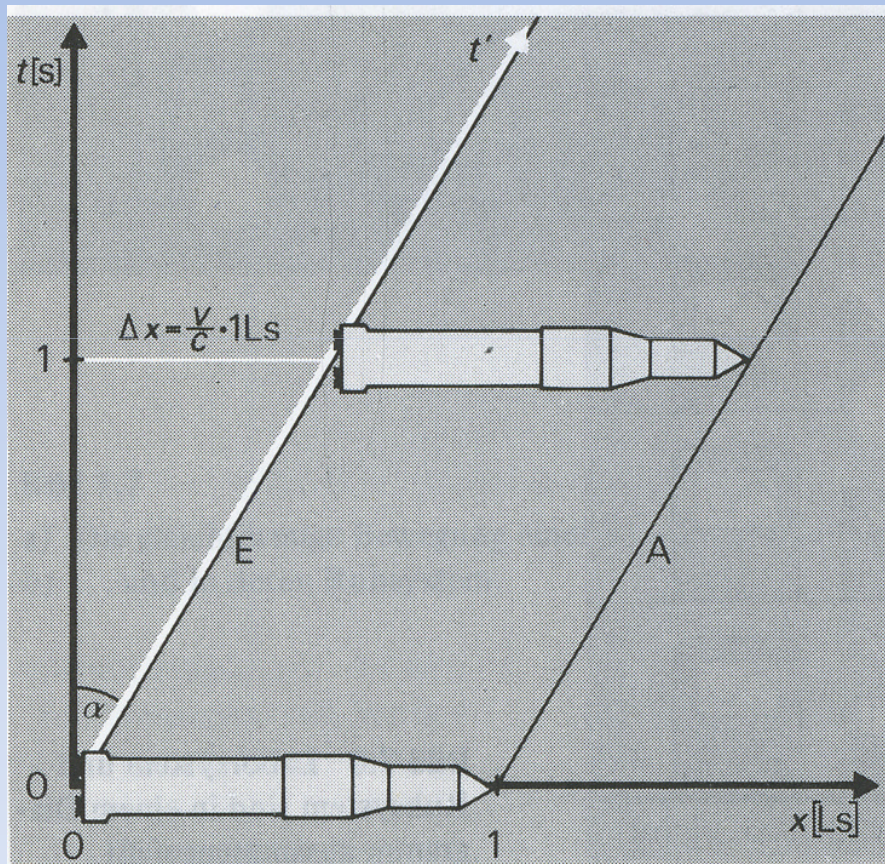
- Die Einheiten auf den Achsen werden so gewählt, dass die Bewegung des Lichts durch die **Winkelhalbierende** dargestellt wird (Lichtlinie):
 - $A1 (1 \mid 0)$
 - $A2 (0 \mid 1)$



*Beobachter B
in einem zweiten System (blau)
bewege sich gleichförmig
mit der Geschwindigkeit
 $v (= 0,6c)$*

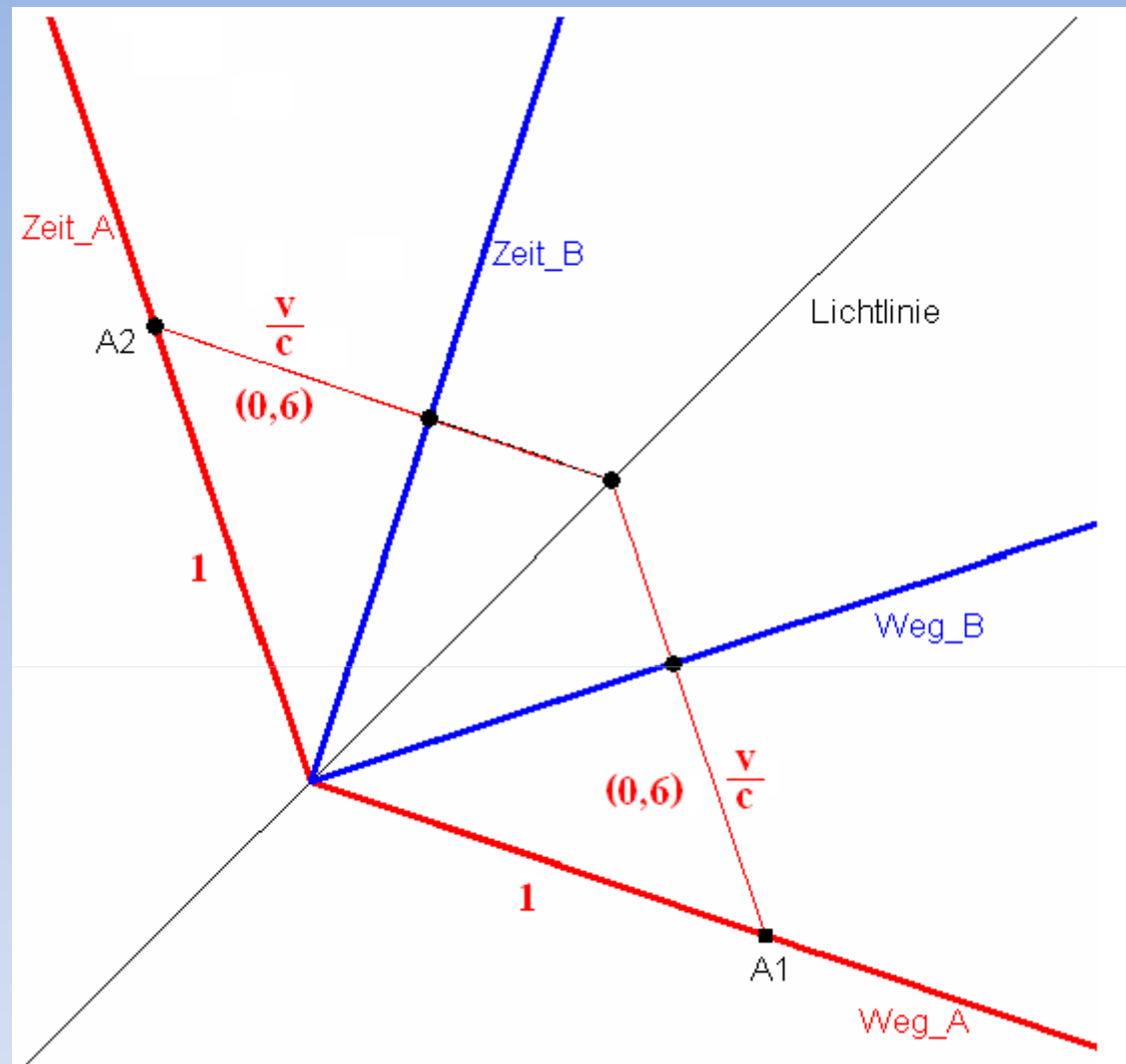
oder $vc^{-1} = 0,6$

Bezugssysteme in der Literatur



- Bezugssystem des Beobachters A rechth.
- Bezugssystem des Beobachters B schief

Aus Sexl/Schmidt: Raum, Zeit, Relativität



Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit verlangt, dass im A- und im B-System die Weg und die Zeitachse symmetrisch zur Lichtlinie liegen.

Gleichwertigkeit der beiden Bezugssysteme:

- *Jeder der beiden Beobachter darf sich als in Ruhe befindlich ansehen.*

Daraus: Mathematische Prinzipien

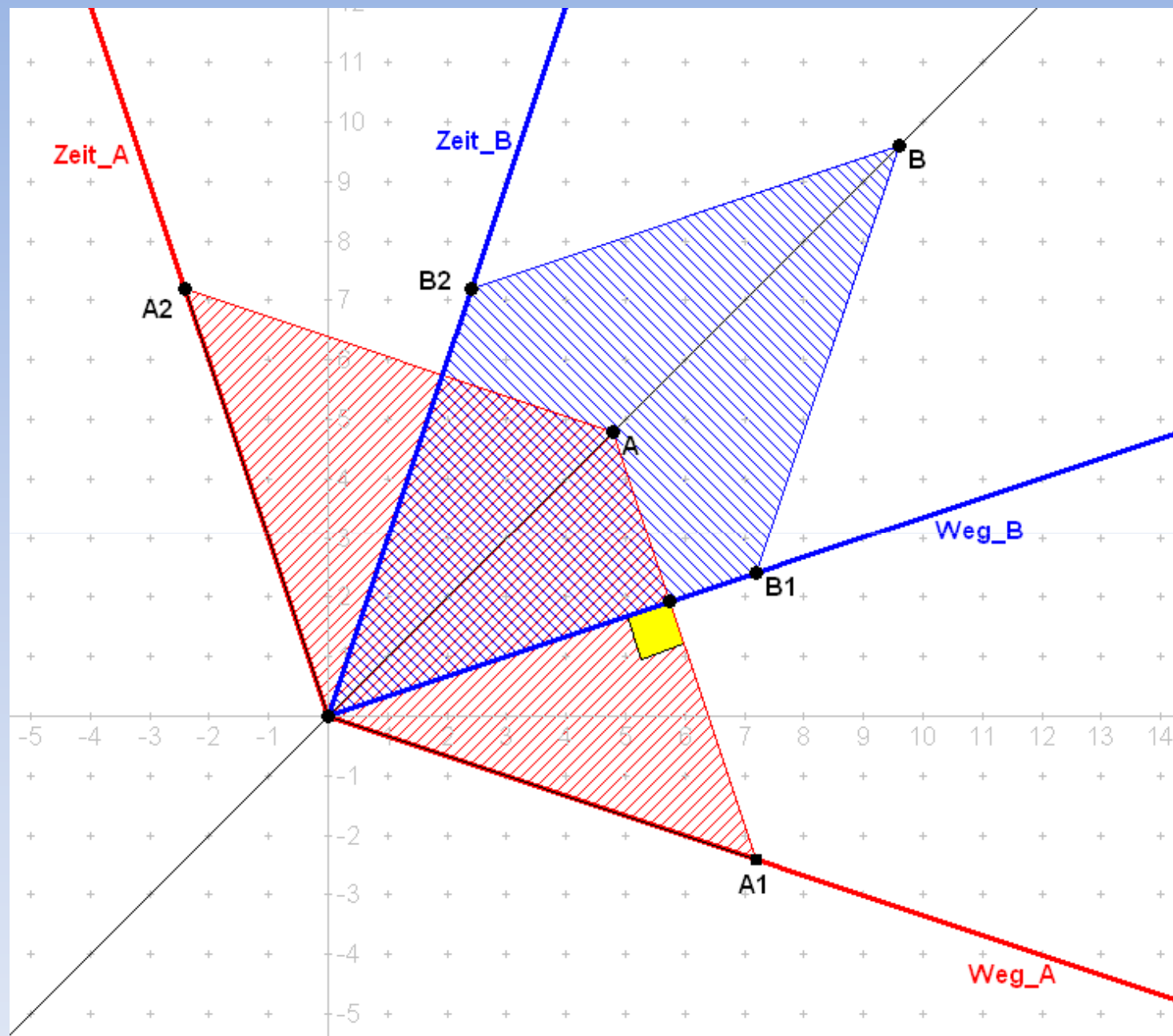
***Weg- und Zeitachse** sind in jedem der beiden Bezugssysteme A und B **achsensymmetrisch** bezüglich der ersten Winkelhalbierenden.*

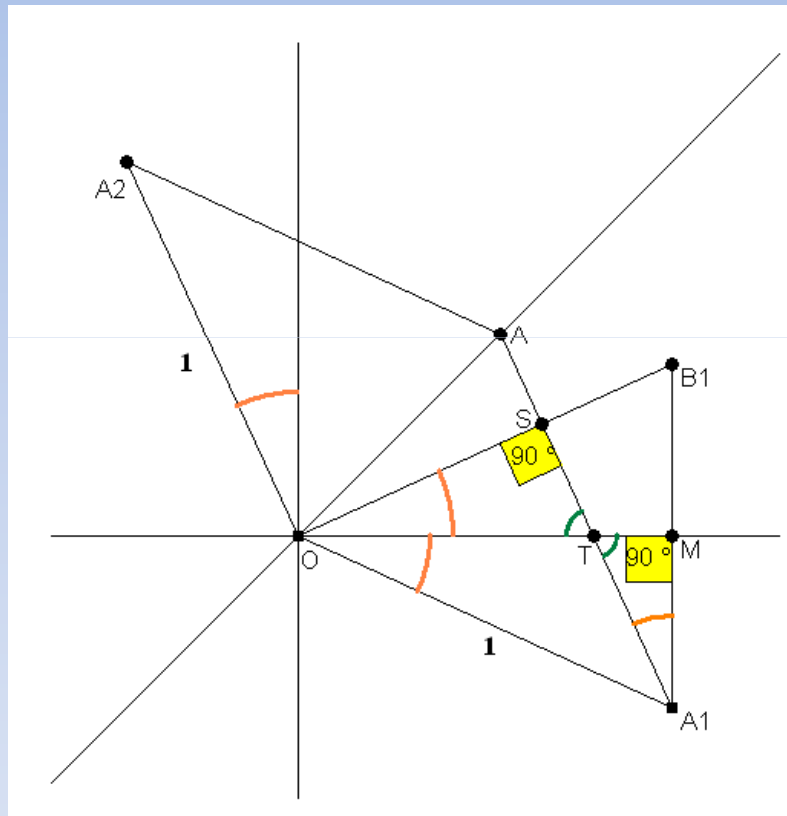
Zusätzlich ein didaktisches Prinzip:

*Die beiden **Wegachsen** bzw. **Zeitachsen** sollen eine weitere Symmetriebedingung erfüllen.*

Drei Symmetriebedingungen

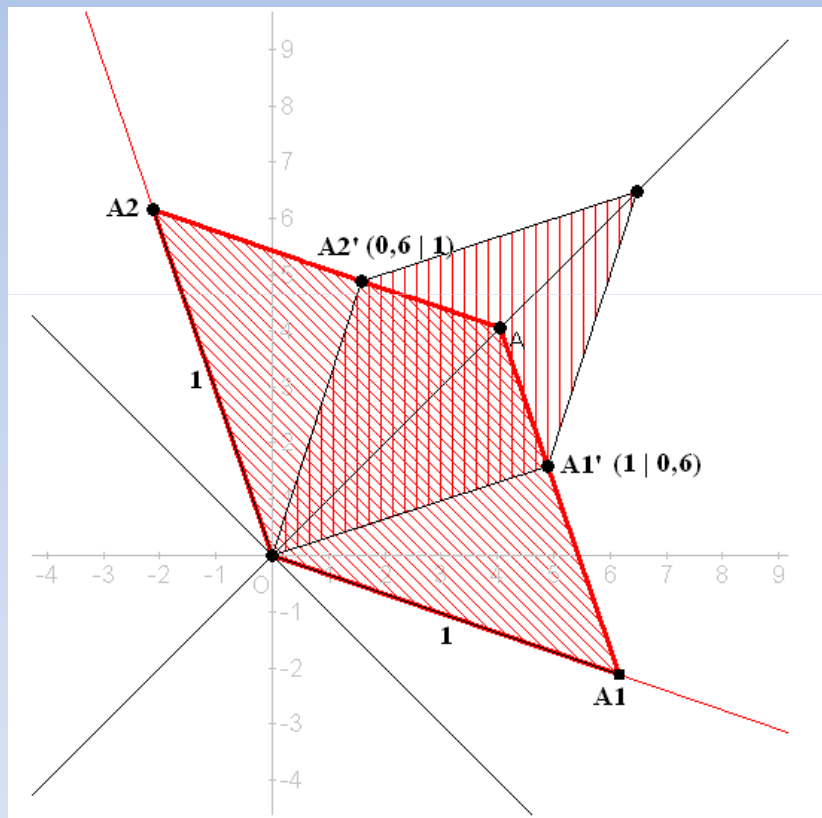
- *Die Achsen des A- und des B-Systems lassen sich zusammen mit einem kartesischen x-y-Koordinatensystem K_0 so wählen, dass*
 - *Weg- und Zeitachse jedes Systems symmetrisch zur ersten Winkelhabierenden von K_0*
 - *die beiden Wegachsen symmetrisch bezüglich der x-Achse des kartesischen Koordinatensystems*
 - *die beiden Zeitachsen symmetrisch bezüglich der y-Achse des kartesischen Koordinatensystems**sind.*





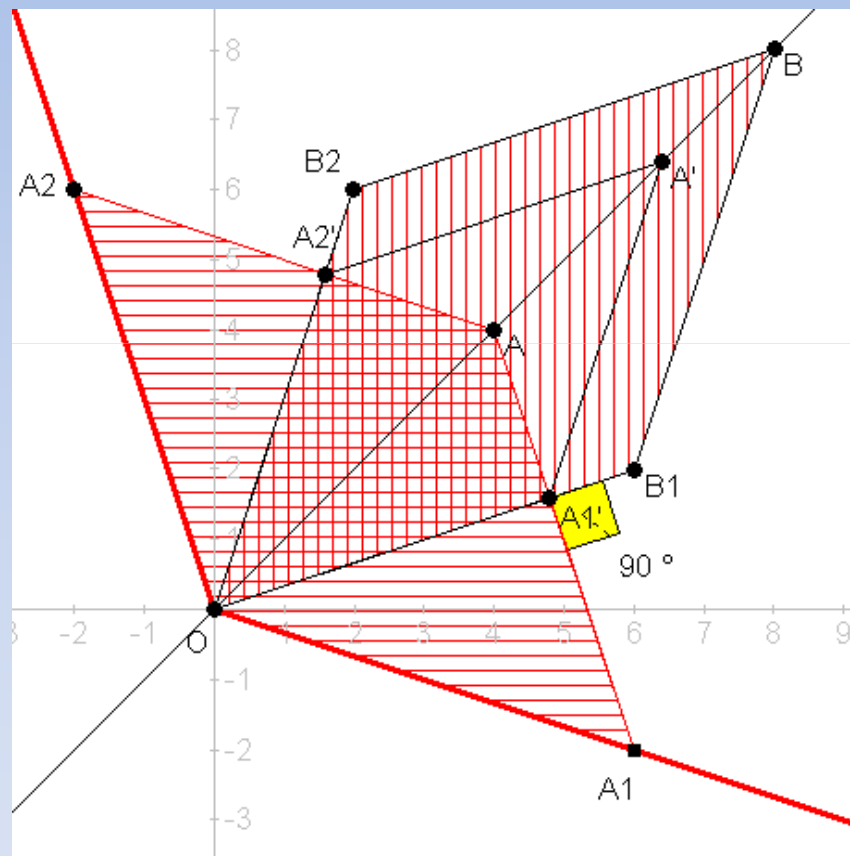
- *Gleichfarbig markierte Winkel sind gleich weit.*
- *Die Dreiecke OTS und TA1M sind ähnlich.*
- *Da Winkel TMA1 ein Rechter ist, ist auch Winkel OST ein Rechter.*

Die Euleraffinität



$$\begin{pmatrix} 1 & 0,6 \\ 0,6 & 1 \end{pmatrix}$$

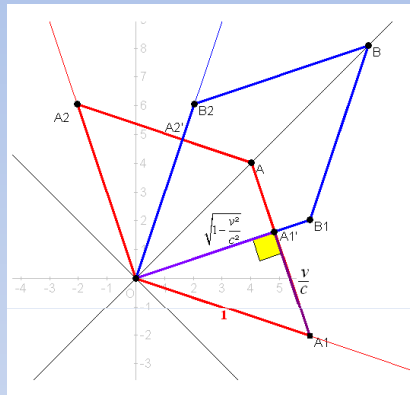
Zentrische Streckung



$$k \begin{pmatrix} 1 & 0,6 \\ 0,6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Wir verallgemeinern: 0,6 wird ersetzt durch $\frac{v}{c}$



- Die Bildpunkte $A1'$ und $A2'$ der Einheitspunkte werden von O aus mit dem Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- zentrisch gestreckt.

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ist der relativistische Faktor!

- Insgesamt wird die Abbildung, welche das Einheitsdreieck OA_1A_2 auf das Dreieck OB_1B_2 abbildet, beschrieben durch die Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix}$$

Das ist die **Lorentztransformation**!

- Sie lautet in üblicher Schreibweise:

$$\text{Mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ ergibt sich}$$

$$x = \gamma \cdot (x' + vt')$$
 und $t = \gamma \cdot (t' + vc^{-2}x')$

Wir erweitern:

$$x = \gamma \cdot (x' + vc^{-1}ct')$$
 und $ct = \gamma \cdot (ct' + vc^{-1}x')$

In Matrixform:

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$

Das bedeutet:

- Die *Lorentztransformation* kann abbildungsgeometrisch als *Euleraffinität* interpretiert werden.

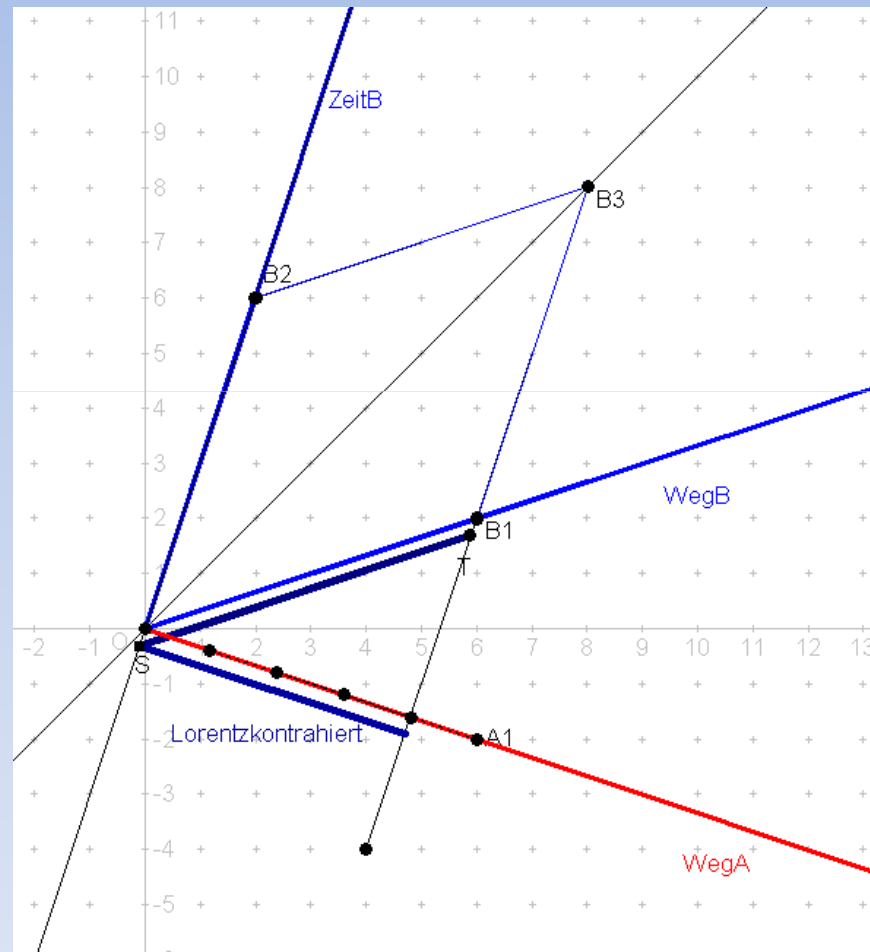
Umkehrabbildung

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

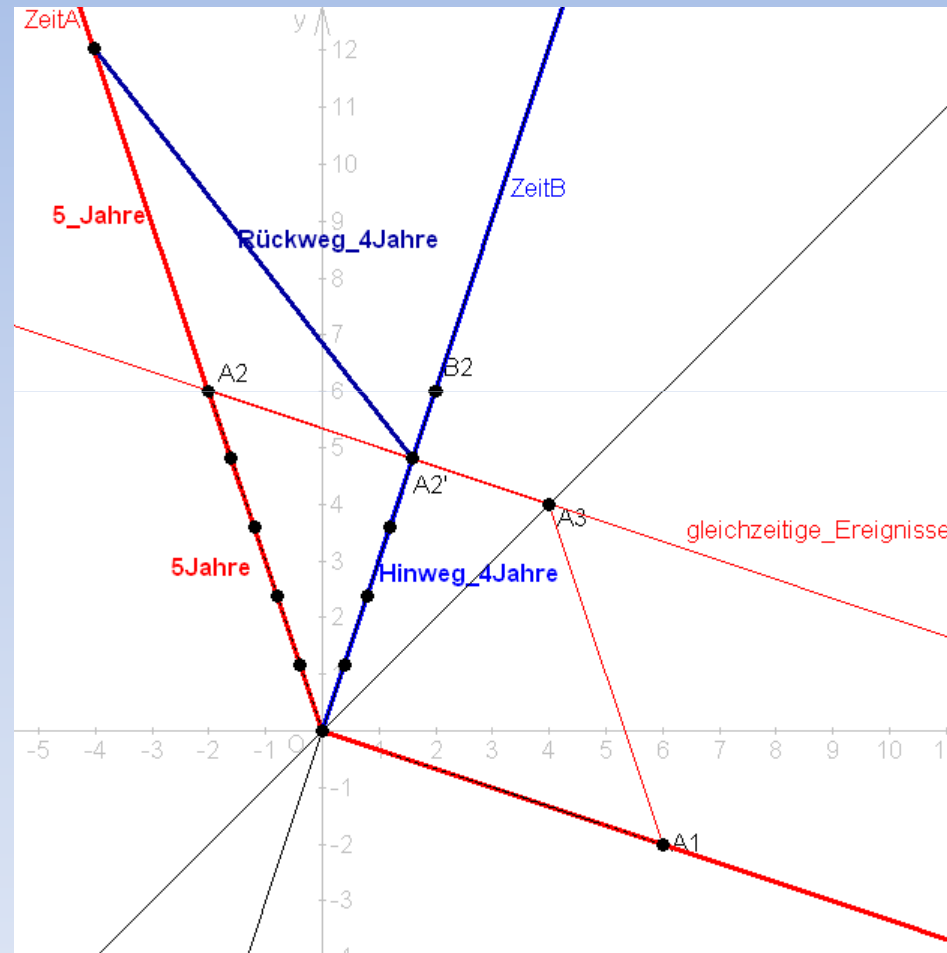
Mit $vc^{-1} = 0,6$ und $\gamma = (1 - 0,6^2)^{-0,5} = 1,25$ ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25 & -0,75 \\ -0,75 & 1,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

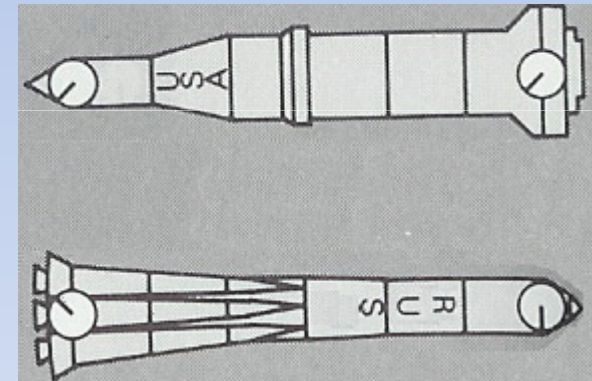
Die Lorentzkontraktion



Die Zeitdilatation



Zwillingsparadoxon



Mögliche Umsetzung im Mathematikunterricht

- Denkbar in Abitursklasse etwa zwischen schriftlicher und mündlicher Prüfung

Unterrichtspraktischer Versuch

- *Zur Verfügung: 2 Doppelstunden*
- *1. Doppelstunde durch zwei Studierende meines Seminars „Computer im Mathematikunterricht“*
- *Thema: Einführung in dynamische Geometrie-Software und affine Abbildungen*
- *2. Doppelstunde von mir selbst:*
- *Thema „Raumzeit“ abbildungsgeometrisch*
- *Planarbeit mit 5 Arbeitsblättern*

- ***Vielen Dank!***