1. Übungsblatt
Differentialtopologie
im SS 2018 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Freitag, den 27.4.18
10 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Ausgabe 1

Seien $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, \mathrm{id})\}$ und $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, \phi)\}$ Atlanten auf $\mathbb{R}$ für ein beliebiges $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Existiert ein je ϕ für das gilt:

(a) $x \to x^{1/2018}$ ist eine glatte Abbildung zwischen $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_1)$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$,

(b) $x \to \sin(x)$ ist eine glatte Abbildung zwischen $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_1)$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$, aber $x \to \cos^{2018}(x)$ ist keine?

Ausgabe 2

Zeigen Sie, dass eine beliebige Komposition glatter Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten ebenfalls glatt ist.

Ausgabe 3

Seien U, $V \subset \mathbb{R}^n_-$ offene Teilmengen des Standard-Halbraums, und sei $f \colon U \to V$ ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus für ein $k \geq 1$.

(a) Zeigen Sie, dass f Punkte aus $\mathring{\mathbb{R}}^n_-$ auf Punkte aus $\mathring{\mathbb{R}}^n_-$ abbildet. Insbesondere ist der Rand ∂M einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit Rand wohldefiniert.

(b) Zeigen Sie, dass ∂M eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand von M ist, und dass $\partial(\partial M) = \emptyset$.

Ausgabe 4

Es sei $W = [0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ der Einheitswürfel. Zeigen Sie:

(a) Für kein $k \geq 1$ ist W eine $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit mit Rand des $\mathbb{R}^3$.

(b) Es gibt einen $\mathcal{C}^\infty$-Atlas $\mathcal{A}$, so dass $(W, \mathcal{A})$ eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ist.