1. Übungsblatt
Differentialtopologie
im SS 2018 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Freitag, den 4.5.18 10 Uhr (also vor der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Ausgabe 1

Sei
$$S^1 := \{r \in \mathbb{R}^2 : ||r||^2 = 1\}.$$
Zeigen Sie dass das Tangentialbündel $T(S^1)$ diffeomorph zu $S^1 \times \mathbb{R}$ ist.

Ausgabe 2

Es sei
$$\mathbb{R}P(n) = (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/\sim,$$
wobei
$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (y_0, y_1, \dots, y_n)$$
falls $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $(x_0, x_1, \dots, x_n) = \lambda(y_0, y_1, \dots, y_n)$ existiert. Schreiben Sie
$$[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P(n)$$
für die Äquivalenzklasse von $(x_0, \dots, x_n)$ und sei $\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}P(n)$ mit
$$\pi((x_0, \dots, x_n)) = [x_0 : \dots : x_n].$$

(a) Es sei $U \subset \mathbb{R}P(n)$ offen gleich dann, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen ist. Zeigen Sie: das definiert eine Topologie.

(b) Zeigen Sie: $\mathbb{R}P(n)$ ist Hausdorff und hat eine abzahlende Basis.

Ausgabe 3

Es sei
$$U_i = \{[x_0 : \dots, x_n] | x_i \neq 0\}, \quad \varphi_i([x_0 : \dots, x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$
Zeigen Sie:

(a) ϕ_i ist ein Homomorphismus $U_i \to \mathbb{R}^n$;

(b) alle Kartenwechsel sind glatt.

Ausgabe 4

(a) Geben Sie eine explizite Einbettung von $\mathbb{R}P(2)$ nach $\mathbb{R}^6$ an.

(b) Geben Sie eine explizite Einbettung von $\mathbb{R}P(2)$ nach $\mathbb{R}^4$ an.