4. Übungsblatt
Differentialtopologie
im SS 2018 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Freitag, den 18.5.18
10 Uhr (in der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Ausgabe 1

Zeigen Sie, dass der Brouwersche Fixpunktsatz nicht für den offenen Einheitsball

$$B^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1 \}$$

gilt, das heißt, finden Sie eine fixpunktfreie Abbildung $B^n \to B^n$.

Ausgabe 2

Zeigen Sie, dass S^n für alle n orientierbar ist.

Ausgabe 3

Es sei M eine glatte, n-dimensionale Mannigfaltigkeit, und sei $\pi\colon o(TM) \to M$ gegeben durch

$$o(TM) = \{ (p, o) \mid p \in M, o \text{ Orientierung von } T_pM \} \qquad \text{und} \qquad \pi(p, o) = p\ .$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine differenzierbare Struktur auf $o(TM)$, so dass es zu jedem Punkt $p \in M$ und jeder Orientierung o von T_pM offene Umgebungen $U \subset M$ von p und $\tilde{U} \subset o(TM)$ von (p, o) existieren, für die $\pi\colon \tilde{U} \to U$ ein Diffeomorphismus ist und die durch die Paare $(q, o_q) \in \tilde{U}$ festgelegten Orientierungen der T_qM eine Orientierung auf ganz U ergeben.

(b) Sei M zusammenhängend, dann ist M genau dann orientierbar, wenn $o(TM)$ nicht zusammenhängend ist.

Ausgabe 4

Es bezeichne $p\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$ die Verkettung der Einbettung $S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit der Projektion $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$.

(a) Für welche n existiert ein Diffeomorphismus $F\colon S^n \to o(T\mathbb{R}P^n)$ mit $p = \pi \circ F$?

(b) Für welche n ist $\mathbb{R}^n$ orientierbar?