5. Übungsblatt
Differentialtopologie
im SS 2018 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Freitag, den 31.5.18
10 Uhr (vor der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Ausgabe 1

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, zusammenhängende, $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, und es sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$. Zeigen Sie:

(a) Für fast alle $v \in S^{n-1}$ ist der Strahl $t \mapsto x + tv$ transversal zu M.

(b) Es gilt $W_2(M, x) = \#\{\, t > 0 \mid x + tv \in M \,\}$ modulo 2.

Ausgabe 2

Sei M eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit, $\dim(M) = n-1$, und $f : M \to \mathbb{R}^n$ glatt. Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{im}(f)$ ein glatter Weg. Zeigen Sie, dass $W(f, \gamma(t))$ nicht von t abhängt. Folgern Sie dass $W(f, \cdot)$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{im}(f)$ lokal konstant ist.
Hinweis: Konstruieren Sie eine Homotopie zwischen zwei Abbildungen $M \to S^{n-1}$.

Ausgabe 3

Es sei W kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit, $\dim(M) = n$, $M = \partial W$, es sei $F =: W \to \mathbb{R}^n$ glatt und $f = F|_M$. Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{im}(f)$ ein regulärer Wert von F. Zeigen Sie:
Es gibt $r > 0$ mit $\overline{B_r(x)} \cap \operatorname{im}(f) = \emptyset$, so dass $F^{-1}(\overline{B_r(x)})$ aus k Zusammenhangskomponenten $K_1, \ldots, K_k$ besteht, für die $F_i = F|_{K_i} : K_i \to \overline{B_r(x)}$ Diffeomorphismus ist.

Ausgabe 4

(Fortsetzung der Übung 3) Zeigen Sie:

(a) Für $f_i = F_i|_{\partial K_i}$ gilt $\deg(F_i, x) = W(f_i, x)$.

(b) Für $F_0 = F_{W \setminus (K_1^\circ \cup \ldots K_k^\circ)}$ gilt $\deg(F_0, x) = 0$.

(c) Es gilt $\deg(F, x) = W(f, x)$.

Ausgabe 5

Sei

$$S := \{te^{it}, \quad t \in [0, \infty)\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{C} \setminus S$ wegzusammenhängend ist.

Ausgabe 6

Es sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene immersierte Kurve, das heißt,

$$\gamma(0) = \gamma(1), \quad \dot\gamma(0) = \dot\gamma(1).$$

Dann kann man γ als Abbildung $S^1 \to \mathbb{R}^2$ auffassen. Es sei $x \notin \mathrm{im}(\gamma)$, und es sei

$$t \mapsto x + sv, \quad s \in [0, \infty)$$

ein Strahl, der $\mathrm{im}(\gamma)$ transversal schneidet. Es seien $\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_k)$ die Schnittpunkte von γ mit diesem Strahl. Dann gilt

$$W(\gamma, x) = \sum_j \operatorname{sign}\det(v, \dot\gamma(t_j)).$$

Ausgabe 7

Was ist die Windungszahl $W(\gamma, p)$ für $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(e^{i\phi}) = (\sin(\phi), \sin(2\phi))$ um die Punkte $p = (\frac{1}{2}, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ und $(0, 1)$?

Ausgabe 8

Was ist die Windungszahl $W(\gamma, p)$ für $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(e^{i\phi}) = (\sin(k\phi), \cos(k\phi))$, $k \in \mathbb{N}$ um den Punkt $p = (0, 0)$?