7. Übungsblatt
Differentialtopologie
im SS 2018 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Freitag, den 15.6.18
10 Uhr (vor der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Ausgabe 1

Zeigen Sie:

(a) Jede Abbildung $F\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ mit $F(zx) = zF(x)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}^{n+1}$ induziert ein Vektorfeld X auf $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$. Für $x \neq 0$ gilt $X([x]) = 0$ genau dann, wenn $F(x) \in \mathbb{C} \cdot x$.

(b) Bestimmen Sie die Eulerzahl von $\mathbb{C}P^n$, indem Sie mit einer geeigneten linear Abbildung F starten. *Hinweis:* In (b) können Sie in Karten $[x_0 : \cdots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \in \mathbb{C}^n$ arbeiten, um die Vorzeichen der Nullstellen von X zu bestimmen.

Ausgabe 2

Es seien M, N Mannigfaltigkeiten; M sei kompakt und zusammenhängend. Es sei $\pi\colon \tilde{M} \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Jeder Punkt $n \in N$ hat gleich viele Urbilder in M.

(b) Sei k die Anzahl der Urbilder in (a), dann gilt $\chi(M) = k\chi(N)$.

Ausgabe 3

Bestimmen Sie die Eulercharakteristik $\chi(\mathbb{R}P^n)$. *Hinweis:* verwenden Sie unterschiedliche Methoden für gerade und für ungerade n.

Ausgabe 4

Beweisen Sie mindestens zwei der vier Aussagen aus Proposition 3.7.