9. Übungsblatt
Differentialtopologie
im SS 2018 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Freitag, den 29.6.18 10 Uhr (vor der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Ausgabe 1

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Zeigen Sie:

(a) $\alpha(\mathcal{L}_X\alpha) = \mathcal{L}_X(d\alpha)$,

(b) $\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\alpha - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X\alpha = \mathcal{L}_{[X,Y]}\alpha$.

Hinweis zu (b): Beweisen Sie zunächst eine Produktregel für $\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\alpha - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X\alpha$.

Ausgabe 2

Beweisen Sie Exaktheit der Sequenz im Schlangenlemma 3.37 an mindestens einer der Stellen $\Omega^\bullet(M)$, $\Omega^\bullet(A)$ oder $\Omega^\bullet(M, A)$.

Ausgabe 3

Sei $A \subset M$ Retrakt von M, dass heißt, es existiert eine glatte Abbildung $\tau : M \to A$, so dass $\tau \circ \iota_A = \mathrm{id}_A$. Zeigen Sie:

(a) Dann ist $\iota_A^* : H_{\mathrm{dR}}^\bullet(M) \to H_{\mathrm{dR}}^\bullet(A)$, surjektiv,

(b) S^1 ist kein Retrakt von D^2,

(c) Folgern Sie daraus den Brouwerschen Fixpunktsatz in Dimension 2.

Ausgabe 4

Es sei $\pi : M \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus zwischen kompakten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten ohne Rand wie in Aufgabe 2 von Blatt 7. Zeigen Sie:

(a) Jeder Punkt $g \in N$ hat eine Umgebung $U \subset N$ so dass $F^{-1}(U) = U_1 \dot\cup \dots \dot\cup U_k$, und $F : U_i \to U$ ist ein Diffeomorphismus für alle k,

(b) es gibt eine Abbildung $\pi_\# : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(N)$ so dass für alle α und alle $U \subset N$ mit $F^{-1}(U) = U_1 \dot\cup \dots \dot\cup U_k$ wie oben gilt:

$$\pi_\#\alpha|_U = \sum_{i=1}^k ((F|_{U_i})^{-1})^*(\alpha|_{U_i}).$$

(c) Es gilt $\pi_\# \circ \pi^* = k \cdot \mathrm{id}_{\Omega^\bullet(N)}$,

(d) Die Abbildung $\pi^* : H_{\mathrm{dR}}^\bullet(N) \to H_{\mathrm{dR}}^\bullet(M)$ ist injektiv.