Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Martin Kalck
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2019
3. Juli, 2019

Übungsblatt 10

Abgabe: Mittwoch, den 10.07.2019
in die Briefkästen der Tutoren.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmässig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1: Es seien $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ stückweise glatt und $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sowie $h\colon \operatorname{im}(f) \to \Omega$ holomorph. Zeigen Sie:

$$(a) \qquad \int_\gamma f'(z)g(z)dz = \big(f(z)g(z)\big)\Big|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} - \int_\gamma f(z)g'(z)dz;$$

$$(b) \qquad \int_{f\circ\gamma} h(z)dz = \int_\gamma h(f(z))f'(z)dz.$$

Aufgabe 2: Begründen Sie, dass sich die folgenden Integrale mit dem Residuensatz bestimmen lassen, und berechnen Sie sie:

$$(a) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(1+ix)}{1+x^2}dx, \qquad\qquad (b) \qquad \int_0^{2\pi} e^{\frac{\sin x - 3i/4}{\cos x - 5/4}}\, dx.$$

Hier bezeichne Log den Hauptzweig des komplexen Logarithmus von Übungsblatt 8.

Bitte wenden für Aufgaben 3 und 4.

Aufgabe 3: Es seien $P(z)$ und $Q(z)$ Polynome vom Grad p bzw. q ohne gemeinsame Nullstellen.

(a) Wenn P nicht konstant ist, gilt

$$N(P, \widehat{\mathbb{C}}, w) = p \qquad \text{für alle } w \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

(b) Wenn $\frac{P}{Q}$ nicht konstant ist, gilt

$$N\left(\frac{P}{Q}, \widehat{\mathbb{C}}, w\right) = \max(p, q) \qquad \text{für alle } w \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Aufgabe 4:

Sei $p(z) = a_0 z^d + a_1 z^{d-1} + \ldots + a_d$ ein Polynom vom Grad $d > 0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{C}$.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass ein $R > 0$ existiert, sodass

$$|a_i| < \frac{R^i}{d} |a_0|$$

für alle $i > 0$ gilt. Folgern Sie, dass

$$N(p, B_R(0), 0) = d$$

gilt. Insbesondere liegen also sämtliche Nullstellen von p in $B_R(0)$.

(b) (1 Punkte) Finden Sie für jede natürliche Zahl $d > 0$ ein Polynom $q_d(z) = a_0 z^d + a_1 z^{d-1} + \ldots + a_d$ vom Grad d und ein $R > 0$ mit

$$|a_i| \leq \frac{R^i}{d} |a_0|$$

für alle $i > 0$ und

$$N(q_d, B_R(0), 0) < d.$$