Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Martin Kalck
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2019
17. Juli, 2019

Übungsblatt 12

Abgabe: Mittwoch, den 24.07.2019
in die Briefkästen der Tutoren.

Die korrigierten Lösungen können am
01. August in der Sprechstunde (14-16 Uhr) von
Martin Kalck (Raum 342) oder später im
Büro von Frau Keim (Raum 341) abgeholt werden.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmässig auf die Teilaufgaben verteilt.
Alle Punkte die Sie auf diesem Übungsblatt bekommen sind Bonuspunkte.

Aufgabe 1: Wir betrachten die Partialbruchzerlegung der Funktion $z \mapsto \frac{1}{\sin^2 z}$ aus Beispiel 5.3.

(a) Bestimmen Sie durch mehrfaches Ableiten an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ den Wert von

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots .$$

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) und Beispiel 5.3

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots \qquad \text{für } k = 2, 4.$$

Aufgabe 2: Wir betrachten die Partialbruchzerlegung des Cotangens aus Beispiel 5.5.

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{\sin z} = \cot \frac{z}{2} - \cot z$, und leiten Sie eine Partialbruchzerlegung für $\frac{1}{\sin z}$ her.

(b) Welche Reihen können wir durch Einsetzen von $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ in die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{\sin z}$ berechnen?

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\, \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\, \Gamma(z).$$

Aufgabe 4:
Es sei

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Zeigen Sie, dass $\zeta(z)$ für alle z mit $\operatorname{Re} z > 1$ holomorph ist.