Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Martin Kalck
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2019
24. Juli, 2019

Lösungsskizzen Übungsblatt 12

Aufgabe 4 (Anwendung von Folgerung 5.2):
Sei $n > 0$ eine natürliche Zahl und $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 1$. Definiere $n^z = \exp(z \cdot \log(n))$, wobei exp die komplexe Exponentialfunktion und log der natürliche Logarithmus seien.
Definiere $f_n(z) = \frac{1}{n^z}$ auf $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$. Wir behaupten, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

normal auf Ω konvergiert (s. Def. 5.1.) und damit $\zeta(z)$ nach Folgerung 5.2 holomorph auf Ω ist.
Sei dafür $z_0 \in \Omega$ und $t > 1$ eine reelle Zahl, so dass $\mathrm{Re}(z_0) > t$ gilt. Setze $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > t\}$.
Dann gilt für alle $z \in U$ und alle natürlichen Zahlen $n > 0$:

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}} < \frac{1}{n^t} =: C_n.$$

Für normale Konvergenz bleibt zu zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$$

für $t > 1$ konvergiert. Das folgt zum Beispiel aus dem Cauchy'schen Verdichtungskriterium[1]:
Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

Alternativ kann man Konvergenz durch folgende Abschätzung zeigen (da $\frac{1}{n^t} > 0$ für alle $n > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t} \leq 1 + \int_1^{\infty} s^{-t} dt = 1 - \frac{1}{1-t} < \infty$$

Aufgabe 3 (Anwendung Satz 5.9.(Charakterisierung nach Wielandt): Sei $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen, reicht es die Gleichung

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\, \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\, \Gamma(z).$$

[1] Zusammen mit Konvergenz der geometrischen Reihe und Majorantenkriterium

auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \Omega$ zu zeigen, um sie für ganz Ω folgern zu können.
Wir möchten den Satz von Wielandt (Satz 5.9) auf die auf $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < \mathrm{Re}(z) < 2\}$ definierte Funktion

$$\Lambda(z) = \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}}$$

anwenden. Man muss sich also überlegen, dass

- $\Lambda(z)$ auf U holomorph ist (dies bleibt dem Leser als Übung überlassen).
- $\Lambda(z)$ auf $V = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \mathrm{Re}(z) < 2\}$ beschränkt ist (folgt aus Definition von V und Beschränktheit der einzelnen Faktoren dort.)
- Wir zeigen nun $\Lambda(z+1) = z\Lambda(z)$ für alle $z \in U$ mit $z+1 \in U$:

$$\begin{aligned}\Lambda(z+1) &= \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)\frac{2^{z}}{\sqrt{\pi}}\\ &= \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\cdot\frac{z}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\frac{2^{z}}{\sqrt{\pi}}\\ &= z\ \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\frac{2^{z}}{2\sqrt{\pi}}\\ &= z\ \Lambda(z)\end{aligned}$$

- Schliesslich bestimmt man $\Lambda(1) = 1$ mittels Satz 5.10.

Es folgt, dass $\Lambda(z) = \Gamma(z)$ auf ganz U nach Satz 5.9. Umformen ergibt die zu zeigende Identität (die wie gesagt auf ganz Ω nach dem Identitätssatz gilt).

Aufgabe 1: Wir leiten beide Seiten der Identität aus Beispiel 5.3. zweimal ab. Für die linke Seite ergibt sich mit Ketten- und Quotientenregel

$$\left(\frac{1}{\sin^2(z)}\right)'' = \frac{2}{\sin^2(z)} + \frac{6\cos^2(z)}{\sin^4(z)}$$

Auf der rechten Seite erhält man mittels Folgerung 5.2. (hier muss zusätzlich geprüft werden dass 5.2 anwendbar ist – i.e. dass normale Konvergenz vorliegt):

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-\pi n)^2}\right)'' = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{6}{(z-\pi n)^4}$$

Durch Einsetzen an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ folgt, dass

$$\begin{aligned}2 = \frac{2}{\sin^2(\pi/2)} + \frac{6\cos^2(\pi/2)}{\sin^4(\pi/2)} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{6}{(\pi/2-\pi n)^4}\\ &= 6\cdot 2^4\cdot\frac{1}{\pi^4}\left(\sum_{n\leq 0}\frac{1}{(2n-1)^4} + \sum_{n>0}\frac{1}{(2n-1)^4}\right)\\ &= 6\cdot 2^4\cdot\frac{1}{\pi^4}\cdot 2\left(\sum_{n>0}\frac{1}{(2n-1)^4}\right)\end{aligned}$$

Umformen ergibt die in Teil (a) gesuchte Identität

$$\left(\sum_{n>0} \frac{1}{(2n-1)^4}\right) = \frac{\pi^4}{96}.$$

Für Teil (b) bemerken wir zunächst, dass die beiden Reihen nach der Lösung von Aufgabe 4 (s. oben) absolut konvergieren. Wir können sie also ohne Änderung des Ergebnisses umordnen. Zusammen mit Beispiel 5.3. ergibt sich

$$\begin{aligned}\zeta(2) := \left(\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}\right) &= \frac{\pi^2}{8} + \left(\sum_{m>0} \frac{1}{(2m)^2}\right)\\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\zeta(2)\end{aligned}$$

Durch Auflösen nach $\zeta(2)$ ergibt sich:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Ganz ähnlich kann man für $\zeta(4)$ vorgehen um

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

zu erhalten.

Aufgabe 2:

(a) Wir verwenden die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.

$$\begin{aligned}\cot(z/2) - \cot(z) &= \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} - \frac{\cos(z)}{\sin(z)}\\ &= \frac{2\cos^2(z/2)}{2\sin(z/2)\cos(z/2)} - \frac{\cos^2(z/2) - \sin^2(z/2)}{\sin(z)}\\ &= \frac{2\cos^2(z/2)}{\sin(z))} - \frac{\cos^2(z/2) - \sin^2(z/2)}{\sin(z)}\\ &= \frac{\cos^2(z/2) + \sin^2(z/2)}{\sin(z)}\\ &= \frac{1}{\sin(z)}\end{aligned}$$

In Beispiel 5.5. wurde folgende Partialbruchzerlegung für den Cotangens gezeigt

$$\cot(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right)$$

Wir erhalten also

$$\frac{1}{\sin(z)} = \cot(z/2) - \cot(z) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{2}{z-2n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right) - \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right)$$

Dabei konvergieren $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{2}{z-2n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right)$ und $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right)$ normal (insbesondere also absolut). D.h. es darf wie folgt umgeordnet werden

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{2}{z-2n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right) - \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right)\\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{2}{z-2n\pi} + \frac{2}{2n\pi}\right) - \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-2n\pi} + \frac{1}{2n\pi}\right) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-(2n-1)\pi} + \frac{1}{(2n-1)\pi}\right)\\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-2n\pi} + \frac{1}{2n\pi}\right) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-(2n-1)\pi} + \frac{1}{(2n-1)\pi}\right)\\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (-1)^n \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right).
\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich folgende Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{\sin(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (-1)^n \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right). \tag{1}$$

(b) Durch Einsetzen von $\frac{\pi}{4}$ auf beiden Seiten von (1)

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= \frac{4}{\pi} + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (-1)^n \left(\frac{4}{\pi - 4\pi n} + \frac{1}{n\pi}\right)\right)\\
&= \frac{4}{\pi} \cdot \left(1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n-1}\right)\\
&= \frac{4}{\pi} \cdot \left(1 + \sum_{n>0} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1}\right)\right)\\
&= \frac{4}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \pm \cdots\right)
\end{aligned}$$

Es folgt also

$$\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \pm \cdots\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Auf ähnliche Weise erhält man durch Einsetzen von $\frac{\pi}{2}$ auf beiden Seiten von (1)

$$1 = \frac{4}{\pi} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots\right). \tag{2}$$

Der entscheidende Schritt dafür ist

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n>0} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots \right). \end{aligned}$$

Umformen von (2) ergibt

$$\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Dies ist auch als *Leibniz Reihe* bekannt.