Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2014
8. Mai, 2014

Übungsblatt 2

Abgabe: 15. Mai, 2014

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie, dass die Verkettung zweier holomorpher Funktionen wieder holomorph ist.

(b) Leiten Sie die Kettenregel für holomorphe Funktionen (Proposition 1.15 (2) im Skript) aus der Kettenregel aus Analysis II ab.

Aufgabe 2: Beweisen Sie Proposition 1.20 im Skript:
Es seien $\gamma\colon [a,b] \to [c,d]$ eine stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, und $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ ein stückweiser $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus. Dann hat $\dot\varphi$ konstantes Vorzeichen, und es gilt

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz = \operatorname{sign}\dot\varphi \int_\gamma f(z)dz.$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie

$$\int_\gamma |z|^2 dz,$$

wenn

(a) γ eine Parametrisierung des Einheitskreises in $\mathbb{C}$ ist.

(b) γ eine Parametrisierung des Randes des Quadrates $[0,\pi]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 4: Es sei $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \sinh(x)\sin(y) - i\cosh(x)\cos(y).$$

wobei $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$.

(a) Zeigen Sie, dass f holomorph ist.

Für $w \in \mathbb{C}$ definieren wir $F(w) = \int_{\gamma_w} f(z)dz$, wobei $\gamma_w\colon [0,2]\to\mathbb{C}$ durch

$$\gamma_w(t) = \begin{cases} t\operatorname{Re}(w) & \text{falls } 0 \le t \le 1 \\ \operatorname{Re}(w) + i(1-t)\operatorname{Im}(w) & \text{falls } 1 \le t \le 2 \end{cases} \qquad \text{definiert ist.}$$

(b) Bestimmen Sie $F(w)$ für alle $w \in \mathbb{C}$.

(c) Zeigen Sie, dass $F\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorph ist.

(d) Bestimmen Sie $F'(w)$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.