Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2014
8. Mai, 2014

Übungsblatt 3

Abgabe: 22. Mai, 2014

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $p, q \in \Omega$, und

$$\mathcal{K}_{p,q} = \{\gamma : [0,1] \to \Omega \text{ stückweise } \mathcal{C}^1\text{-Kurve mit } \gamma(0) = p \text{ und } \gamma(1) = q\}.$$

Zeigen Sie, dass die stückweise $\mathcal{C}^1$-Homotopie in Ω eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{K}_{p,q}$ ist.

Aufgabe 2: Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *sternförmig*, wenn es ein $z_0 \in \Omega$ gibt, so dass für alle $z \in \Omega$ die Verbindungsstrecke $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz$ mit $t \in [0,1]$ in Ω enthalten ist. Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) Das Schlitzgebiet $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \leq 0 \text{ und } \mathrm{Im}(z) = 0\}$ ist sternförmig.

(b) (1 Punkt) Die punktierte Kreisscheibe $B_r^*(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ ist nicht sternförmig.

(c) (2 Punkte) Jedes sternförmige Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

Aufgabe 3: Es sei γ der Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Berechnen Sie

$$(a) \int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz, \qquad (b) \int_\gamma \frac{\sin z}{z} dz.$$

Aufgabe 4: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $(0,1) \subset \Omega$ und $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so dass

$$f(x) = \log x \qquad \text{für alle } x \in (0,1).$$

Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) Auf Ω gilt $\exp(f(z)) = z$.

(b) (2 Punkte) Für $r > 0$ und $\phi \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(r \exp(i\phi)) = \log(r) + i(\phi + 2k\pi)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$.

(c) (1 Punkt) Ω kann keinen Kreis

$$S_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$$

enthalten.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.