Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2014
22. Mai, 2014

Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch, 28. Mai, 2014, bis 16:00Uhr

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1: Für die folgenden Funktionen f und Punkte z_0 bestimmen Sie der Art der Singularität von f in z_0. Bei hebbaren Singularitäten bestimmen Sie den Grenzwert von f, und bei Polen geben Sie den Hauptteil an.

$$(a)\ \frac{1}{1-e^z} \quad \text{in } z_0 = 0, \qquad (b)\ \frac{z^3+3z+2i}{z^2+1} \quad \text{in } z_0 = -i,$$

$$(c)\ \sin\frac{\pi}{z^2+1} \quad \text{in } z_0 = i, \qquad (d)\ \cos(\frac{1}{z}) \quad \text{in } z = 0.$$

Aufgabe 2: Es sei $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die ergänzte komplexe Ebene. (Man bezeichnet es auch als die *Riemannsche Zahlenkugel.*) Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ sei $M_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ die Möbiustransformation

$$M_A(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{falls } cz+d \neq 0 \text{ und } z \neq \infty \\ \infty & \text{falls } c = 0 \text{ und } z = \infty \\ \infty & \text{falls } c \neq 0 \text{ und } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{falls } c \neq 0 \text{ und } z = \infty. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $M_A \circ M_B = M_{A \cdot B}$ und $M_{E_2} = \mathrm{id}$.

(b) M_A ist bijektiv.

(c) $M_{wA} = M_A$ für alle $w \in \hat{\mathbb{C}}$.

(d) Falls A, $B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, dann gilt $M_A = M_B$ genau dann, wenn $A = \pm B$.

Aufgabe 3: Es seien $a_1, \ldots, a_n$ Punkte auf dem Einheitskreis, $S_1(0)$, in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Maximumprinzipes, dass ein z auf dem Einheitskreis existiert, so dass

$$\prod_{j=1}^{n} d(z, a_j) \geq 1.$$

Hier bezeicht $d(z,w) = |z-w|$ die Distanz zwischen z und w bezüglich der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{C}$.

Aufgabe 4:

(a) (1 Punkt) Es sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion. Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

(b) (2 Punkte) Falls f holomorph ist, dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 0.$$

(c) (1 Punkt) Es sei $f = u + iv$ mit $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ holomorph. Dann gilt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.