Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2014
17. Juni, 2014

Übungsblatt 7

Abgabe: Donnerstag, 26. Juni, 2014

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1:

(a) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f\colon U \to V \subset \mathbb{C}$ eine biholomorphe Abbildung. Zeigen Sie, dass V einfach zusammenhängend ist.

(b) Es sei $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ die obere Halbebene und $f(z) = e^{2\pi i z}$. Bestimmen Sie $f(\mathbb{H})$. Ist $f(\mathbb{H})$ einfach zusammenhängend?

Aufgabe 2: Es seien $a,\ b \in \mathbb{C}$ mit $0 < |a| < |b|$. Bestimmen Sie die drei Laurententwicklungen der Funktion $f(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$ um den Punkt 0. Was ist jeweils das Residuum?

Aufgabe 3: Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine biholomorphe Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ hat einen Pol bei $z = 0$.

(b) Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ hat eine Nullstelle der Ordnung 1 in $z = 0$.

(c) Es existiert $a \in \mathbb{C}^*$, so dass die Funktion $z \mapsto f(\frac{1}{z}) - \frac{a}{z}$ konstant ist.

(d) Es sei b die Konstante in (c). Folgen Sie, dass $f(z) = az + b$ gilt.

Aufgabe 4: Es sei $R(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$.

(a) Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ ein Jordan-Block zum Eigenwert $\lambda \in B_\rho(0)$, das heißt $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$, und benutzen Sie das Ergebnis, um zu zeigen, dass

$$R(A) = \begin{pmatrix} R(\lambda) & \frac{1}{1!}R'(\lambda) & \frac{1}{2!}R''(\lambda) & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}R''(\lambda) \\ & & & \ddots & \frac{1}{1!}R'(\lambda) \\ 0 & & & & R(\lambda) \end{pmatrix}.$$

(b) Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ beliebig. Zeigen Sie: $R(A)$ konvergiert, wenn $|\lambda| < \rho$ für alle Eigenwerte λ von A gilt, und divergiert, falls mindestens ein Eigenwert betragsmäßig größer als ρ ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.